Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

6–7 классы, 2-е полугодие (15 занятий)

Составители: С. Л. Кузнецов, А. А. Оноприенко

Москва, 2017

Математический кружок. 6–7 классы, 2-е полугодие (15 занятий). / Методическое пособие для выявления и развития математических способностей обучающихся // Сост. С. Л. Кузнецов, А. А. Оноприенко. — М.: МГУ, 2017.

Методическое пособие разработано в рамках Концепции Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова «Повышение математической культуры в обществе» и при финансовой поддержке Департамента образования г. Москвы. В основу брошюры легли задачи, предлагавшиеся на Малом мехмате МГУ, на математических кружках в некоторых московских школах, а также статьи первого автора-составителя в журналах «Квант» и «Квантик».

Пособие предназначено для преподавателей, организующих и проводящих математические кружки.

Содержание

Указания по ведению кружка

Эта брошюра призвана помочь организовать *математический кружок* для школьников, чей возраст условно соответствует 6 или 7 классу средней школы, однако собранные здесь задачи можно с успехом решать с умными 5-классниками, а также предлагать (в рамках «ликвидации безграмотности») старшеклассникам, которым не довелось в должное время поучаствовать в математических кружках.

Каждый раздел брошюры соответствует одному занятию кружка и состоит из двух частей — листка с задачами для выдачи ученикам и комментария для преподавателя. Для удобства оригинал-макеты листков также выделены в отдельный файл.

Занятие с использованием листочка обыкновенно проводится примерно **по следующей схеме:**

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи и, если необходимо, читает комментарии.

- *В начале занятия* каждый школьник получает листок с условиями задач и начинает *самостоятельно* их решать. На первом занятии школьникам нужно объявить: задачи можно решать в любом порядке; как только задача (по мнению школьника) решена, нужно поднять руку и приготовиться обсуждать решение с преподавателем *устно*. Кружок — это не письменная олимпиада. Как правило, **не нужно** в начале занятия «рассказывать теорию»: задачи подобраны так, чтобы решающий сам додумался до ключевых идей листочка. Иногда в начале занятия, до раздачи новых листков, разбираются решения некоторых задач предыдущего занятия.

- *Во время занятия* школьники решают задачи и время от времени пытаются их «сдать» преподавателям. Преподавателей на кружке может быть несколько, если учеников достаточно много. В идеале на каждого преподавателя должно приходиться 7–9 школьников. Решения задач обсуждаются *индивидуально* с каждым школьником.

– Если решение **верно,** школьника следует поздравить с решённой задачей и поставить «плюсик» в специальную таблицу (кондуит, или «плюсник»).
– Если решение **неверно,** школьнику предлагается продолжить размышления над задачей. Иногда можно давать небольшие подсказки.

Мы считаем, что **главная цель** математических кружков — приносить школьникам **радость** решения математических задач и через это развивать их смекалку и расширять кругозор. Поэтому мы **категорически не советуем** подменять эту главную цель целями побочными, в частности:

- не советуем ставить оценки «за работу на кружках», проводить на кружке контрольные работы и вообще делать участие в кружке обязательным для школьника;
- не советуем объяснять решения всех задач из брошюры (школьник получает радость только от собственного, а не от чужого решения);
- не считаем правильным задаваться целью подготовки к определённому виду олимпиад или других соревнований. (В то же время школьники, посещающие математические кружки, в среднем лучше выступают на олимпиадах.)

Мы полагаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2–3 задачи и немного продвинется ещё в 1–2 задачах, то это уже хороший результат. Однако бывает, что задачи оказываются **слишком сложными** для школьников. В этом случае неправильно превращать занятие в разбор всех задач у доски. Вместо этого можно давать подсказки — как индивидуально, так и всем сразу. Представление о том, как подсказывать в конкретных задачах, можно извлечь из комментариев к листкам.

Если всё-таки наши листочки в целом оказались слишком сложными, мы советуем подбирать к каждому занятию аналогичные по тематике более простые задачи. Помните, что приводимая здесь подборка задач призвана *помочь* в организации кружка, но ни в коем случае не загнать его в жёсткие рамки. При выборе задач прежде всего руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших учеников:** задачи должны нравиться преподавателям, быть интересны и посильны ученикам.

Удачи!

Листок 1. Подсчёт двумя способами

$\boxed{\textbf{1}}$ Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 (5 строк, 10 столбцов) так расставить числа, чтобы сумма чисел каждой строки равнялась бы 30, а сумма чисел каждого столбца равнялась бы 10?

$\boxed{\textbf{2}}$ Несколько шестиклассников и семиклассников обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый шестиклассник пожал руку семи семиклассникам, а каждый семиклассник пожал руку шести шестиклассникам. Кого было больше — шестиклассников или семиклассников?

$\boxed{\textbf{3}}$ В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше — карабасов или барабасов?

$\boxed{\textbf{4}}$ По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые 3 цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел.

$\boxed{\textbf{5}}$ На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине — число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стерли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?

$\boxed{\textbf{6}}$ Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырех углов стопки. Может ли оказаться так, что **а)** в каждом углу стопки сумма равна 2014? **б)** в каждом углу стопки сумма равна 2015?

$\boxed{\textbf{7}}$ Рита, Люба и Варя решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решённую задачу девочка, решившая её первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причём одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются.

Ответы и комментарии

Основная идея задач этого листочка — подойти к вычислению какой-нибудь величины с двух разных сторон и потом сравнить результат. Если результаты не совпали — получено *противоречие.* С другой стороны, если при вычислениях мы использовали неизвестные значения (переменные), то мы получим *уравнение,* решив которое, можно получить ответ к задаче.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Попробуем вычислить сумму всех чисел в таблице. Если считать по строкам, получится $5 \cdot 30 = 150$, если по столбцам, $10 \cdot 10 = 100$. Значит, расставить числа невозможно.

В этой задаче школьники, вероятно, будут пытаться построить пример такой таблицы. Если у школьника это «получилось», нужно внимательно проверить и найти ошибку — не стоит, даже если времени не хватает, сразу сообщать, что „этого не может быть, потому что этого не может быть никогда“. Некоторые школьники могут объявить, что они перепробовали много вариантов, и никак не получается, значит, ответ «нельзя». В таком случае нужно объяснить, что перебор, к сожалению, бесконечен, а если его не провести полностью, нельзя быть уверенным, что искомой расстановки не существует. Если задача долго не решается, аккуратно напомните заголовок листочка.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Общее число рукопожатий, с одной стороны, в семь раз больше числа шестиклассников, а с другой — в шесть раз больше числа семиклассников. Значит, число шестиклассников есть ${}^1/_7$, а число семиклассников есть ${}^1/_6$ от числа рукопожатий. Поскольку ${}^1/_6 > {}^1/_7$, семиклассников больше.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Эта задача похожа на предыдущую, только содержит лишние данные. Нас интересуют только знакомства между карабасами и барабасами. Таких знакомств в девять раз больше, чем карабасов и в десять раз больше, чем барабасов. Значит, поскольку $\frac{1}{9} > \frac{1}{10}$, карабасов больше.

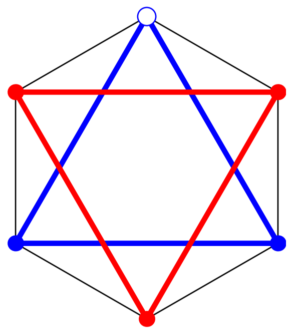
В этой и предыдущей задачах нужно быть очень аккуратными с «решениями», где школьники предлагают конкретные примеры графа знакомств (рукопожатий). Строго говоря, из одного рассмотренного частного случая не следует, что такой же ответ будет и во всех других. Нужно объяснить школьнику, что перебор всех случаев займёт слишком много времени, и предложить поискать более общее решение, заодно ещё раз напомнив тему листочка.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Посчитаем отдельно суммы по разрядам — единиц, десятков и сотен. Тогда общая сумма чисел окажется равной

$$(\text{сумма единиц}) + 10 \cdot (\text{сумма десятков}) + 100 \cdot (\text{сумма сотен}).$$

С другой стороны, при суммировании каждая из цифр оказывается ровно один раз в разряде единиц, ровно один раз в разряде и ровно один раз в разряде сотен. Значит, каждая из трёх поразрядных сумм равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$, а общая сумма — $45 + 10 \cdot 45 + 100 \cdot 45 = 4995$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Если сложить числа в вершинах через одну (всего три числа), то получится сумма всех чисел, которые были написаны на сторонах. Выбрать три вершины через одну можно двумя способами:



— таким образом, сумма чисел в вершинах синего треугольника равна сумме чисел в вершинах красного. Пусть стёрто число в «синей» вершине. Тогда восстановить его можно следующим образом: из суммы «красных» чисел (они все известны) вычесть оставшиеся два «синих» числа.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вычислим сумму всех чисел. С одной стороны, она равна $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot N = 10N$ (где N — число квадратов), т.е. кратно 10. С другой стороны, её можно вычислить, сложив суммы по четырём углам. В пункте **а)** получится $2014 \cdot 4 = 8056$. Это число не кратно 10, значит ответ «нет». Как обычно, рассуждение „мы попробовали много раз и не получилось“ (которое пытаются использовать некоторые школьники) в корне неверно: общее число возможностей чрезвычайно велико, все не переберёшь.

В пункте **б)** получается 8060 — это число делится на 10 нацело, однако этот факт, вообще говоря, не гарантирует, что всё получится: вдруг есть какие-то ещё препятствия. Поэтому от школьников надобно непременно требовать конкретного способа разложить квадраты так, чтобы суммы по всем углам оказались равны 2015. К счастью, это сделать легко: воспользуемся тем, что $1+4 = 2+3 = 5$ и сложим вместе два квадрата так, чтобы на каждом углу сумма получилась равна 5:

2	3
1	4

3	2
4	1

Взяв $2015/5 = 403$ таких пары квадратов, получим на каждом углу искомую сумму 2015.

$\boxed{\mathbf{7}}$ С одной стороны, общее количество конфет равно $20 \cdot 3 = 60$. С другой стороны, за каждую задачу выдавалось (в сумме) по $4 + 2 + 1 = 7$ конфет (здесь важно, что каждая девочка в итоге пришла к решению, таким образом, приз и за первое, и за второе, и за третье решение действительно был выдан) — значит, общее количество конфет должно делиться на 7. Однако 60 на 7 не делится. Значит, где-то ошибка.

Листок 2. Птичка вылетает!

$\boxed{\textbf{1}}$ В фотоателье залетели 50 птиц — 18 скворцов, 17 трясогузок и 15 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щёлкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Какое наибольшее число кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: у него в ателье останутся птицы всех трёх видов?

$\boxed{\textbf{2}}$ В фотоателье залетели 50 птиц — 18 скворцов, 17 трясогузок и 15 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щёлкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Какое наибольшее число кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: в ателье останется не меньше 10 птиц какого-то одного вида?

$\boxed{\textbf{3}}$ В тех же условиях определите, какое наибольшее число кадров может сделать фотограф, чтобы быть уверенным: в ателье останется не меньше 11 птиц какого-то одного вида и не меньше 10 — какого-то другого.

$\boxed{\textbf{4}}$ В комоде 8 чёрных, 6 белых и 1 серый носок. Из него не глядя достают носки. Какое наименьшее число носков нужно достать, чтобы среди них заведомо оказалось **а)** два одинаковых? **б)** три одинаковых? **в)** два разных? **г)** три разных?

$\boxed{\textbf{5}}$ В коробке 10 красных, 15 синих и 20 зелёных шаров. Какое наибольшее число шаров можно не глядя достать из коробки, чтобы в ней осталось не менее 5 шаров какого-то цвета?

$\boxed{\textbf{6}}$ В шкатулке лежат волшебные шары различных цветов. Если Гендальф взмахнёт своим посохом, то ровно 10 шаров изменят свой цвет, и при этом все шары в шкатулке станут зелёными. Если же взмахнёт своим посохом Саруман, то 14 шаров изменят свой цвет, и при этом все шары в шкатулке станут красными. Однако махнул своей тростью Бильбо Бэггинс, и при этом изменили цвет не более трёх шаров. Могло ли случиться так, что после этого все шары стали синими?

Ответы и комментарии

1 Если фотограф сделает 15 кадров, то может случиться, что улетят все дятлы, и останутся только скворцы и трясогузки. Если же кадров всего 14, то птиц любого вида не может улететь больше, чем 14 — значит, хотя бы по одной останется. Ответ: 14.

Мы здесь решили двойственную задачу: какого наименьшего количества кадров достаточно птицам, чтобы «обыграть» фотографа (сделать так, чтобы его условие не выполнялось). Если кадров хотя бы 15, то у коварных птиц есть «стратегия» (улетают все дятлы), если 14 или меньше — стратегии нет. Это соображение полезно рассказать школьникам в первой половине занятия, даже если они успешно справились с первой задачей. Это поможет им взглянуть с этой точки зрения на последующие, более сложные задачи.

2 Птицам здесь нужно сделать численность каждого вида меньше 10. Для этого должны улететь хотя бы 9 скворцов, хотя бы 8 трясогузок и хотя бы 6 дятлов — всего не менее 23 птиц. Значит, если кадров 22, то стратегии нет, и фотограф может быть уверен, что его условие не нарушится. Если же кадров хотя бы 23, то уверенности уже нет. Ответ: 22.

3 Здесь фотограф «гонится за двумя зайцами» (хочет, чтобы сразу выполнялись два условия), и птицам, чтобы обыграть его, достаточно «убить» хотя бы одного из них. Переводя с заячьего языка на птичий — либо сделать так, чтобы птиц каждого вида было не больше 10, либо разрешить, чтобы птиц какого-то вида было сколько угодно, но тогда каждого из остальных видов должно быть не больше 9. Посмотрим, какая из стратегий экономнее с точки зрения количества улетевших птиц. В первом случае должны улететь «лишние» 8 скворцов, 7 трясогузок и 5 дятлов — всего 20 птиц. Во втором случае нам нужно выбрать тот вид, на который мы не накладываем ограничений по численности. Ясно, что это должны быть скворцы — их больше всего. Тогда должны улететь как минимум 8 трясогузок и 6 дятлов — всего 14 птиц. Вторая стратегия явно лучше!

Итак, в этой задаче ответ — 13. Если фотограф сделает хотя бы 14 кадров, то смогут улететь 8 трясогузок и 6 дятлов, и условие нарушится. Если же кадров сделано меньше (не более 13), то, как мы видели, птицы не смогут нарушить ни первое, ни второе условие — не хватит кадров. Значит, фотограф может быть уверен, что нужное число птиц останется.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** Опять посмотрим на худшую (для нас) ситуацию — т.е. попробуем сыграть на стороне коварного комода. Чтобы помешать нам извлечь два одинаковых носка, он должен выдавать каждвй раз носок нового цвета. Но так он сможет «продержаться» только 3 хода: четвёртый носок с необходимостью будет того же цвета, что и один из предыдущих. Ответ: 4 носка.

б) Здесь комод, чтобы выиграть, должен выдать не больше, чем по два носка каждого цвета. Казалось бы, максимум, которого он может добиться — это 6 носков (и тогда ответ — 7). Однако серый носок всего один, значит, выиграть комод сможет только на 5 носках (выдав 2 чёрных, 2 белых и 1 серый). Шестой носок уже окажется либо чёрным, либо белым. Ответ: 6 носков.

в) В этом пункте комод, наоборот, будет выдавать одинаковые носки, и их наибольшее число — восемь. Девятый носок уже с необходимостью будет другого цвета. Ответ: 9 носков.

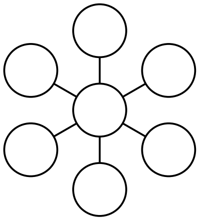
г) А вот в этом пункте, увы, придётся взять все носки — 15 штук. Если мы возьмём только 14, то может оказаться, что единственный серый носок остался в комоде, и все носки у нас в руках только двух цветов (чёрные и белые).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Здесь, наоборот, если мы играем на стороне коробки, нужно суметь выдать *как можно меньше* шаров так, чтобы нарушилось условие — то есть, в коробке шаров каждого цвета осталось бы не более четырёх. Ясно, что для этого нужно выдать 6 красных, 11 синих и 16 зелёных шаров, всего 33 штуки. С другой стороны это выглядит так: если не глядя вынуть 33 шара, то может получиться, что это как раз $6+11+16$, и в коробке останется по 4 шара каждого цвета. Если же вынуть 32 шара, то заведомо какого-то цвета будет хотя бы 5. Ответ: 32.

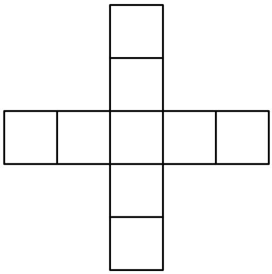
$\boxed{\mathbf{6}}$ Всего шаров не меньше 14, при этом хотя бы 4 из них должны быть зелёными (поскольку Гендальф может сделать зелёными только 10 шаров). Из этих 4 шаров Бильбо сможет перекрасить в только 3. Значит, все шары синими стать не смогут.

Листок 3. Числа в кружочках

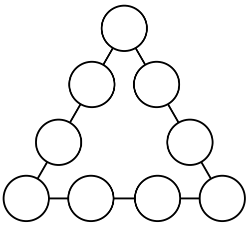
1 Расставьте в снежинке числа от 1 до 7 (каждое ровно один раз) так, чтобы все суммы по три числа на отрезках были одинаковыми.



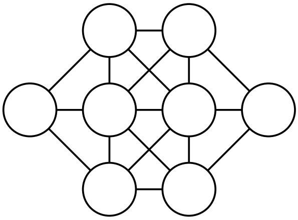
2 Впишите в клетки цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр в обоих рядах была одинакова:



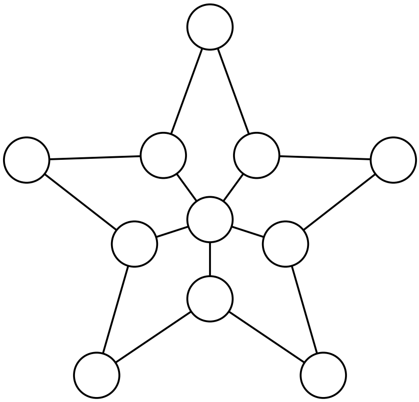
3 Расставьте числа 1, 2, 3, ..., 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 17.



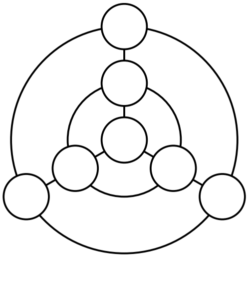
$\boxed{\textbf{4}}$ Расставьте в кружочках на рисунке числа от 1 до 8 (каждое ровно один раз) так, чтобы ни в каких двух соединённых отрезком кружочках не оказались бы соседние (то есть отличающиеся на 1) числа.



$\boxed{\textbf{5}}$ Расположите в кружках числа от 1 до 11 так, чтобы сумма четырёх чисел в вершинах каждого луча звезды равнялась 25.



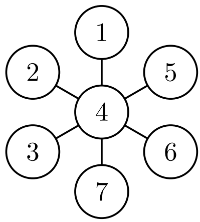
$\boxed{\textbf{6}}$ Расставьте в кружочках цифры от 1 до 7 так, чтобы их сумма на каждой окружности и на каждой прямой равнялась 12.



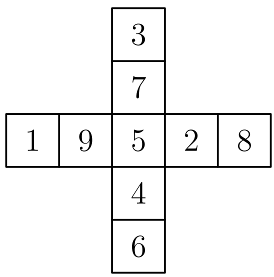
Ответы и комментарии

В каждой из этих задач достаточно проверить только правильность ответа. Однако при разборе полезно также показать некоторые соображения, упрощающие поиск ответа. Будьте внимательны — у задач этого листочка может быть по нескольку правильных решений. Если решение школьника не совпадает с приведённым в ответнике, это не значит, что оно неправильное! Нужно внимательно проверить расстановку чисел на соответствие условиям задачи.

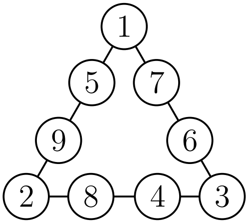
1 Воспользуемся тем, что $1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 8$, и расставим числа в каждой из этих пар в противоположные места. Оставшуюся цифру 4 поставим в середину:



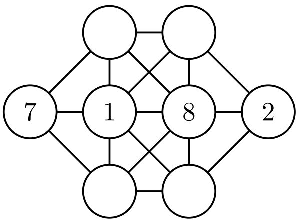
2 Воспользуемся тем, что $1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 10$. Значит, можно вписать в один ряд цифры 1, 9, 2, 8, а в другой — 3, 7, 4, 6, и суммы будут равны. Оставшуюся цифру 5 впишем в центральную клетку:



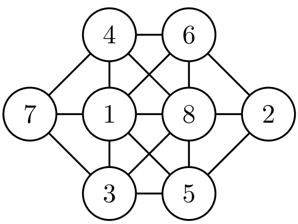
3 Сумма всех чисел от 1 до 9 равна 45. От нас же требуется $3 \cdot 17 = 51$. Разница объясняется тем, что числа в вершинах треугольника посчитаны дважды. Следовательно, их сумма равна $51 - 45 = 6$, и поэтому это непременно числа 1, 2 и 3. Оставшиеся числа «раскидать» по сторонам уже несложно: их суммы должны быть равны, соответственно, $17-(1+2)=14$, $17-(2+3)=12$ и $17-(1+3)=13$. Равенства $9+5=14$, $8+4=12$, и $7+6=13$ дают искомую расстановку:



$\boxed{\mathbf{4}}$ На этой картинке слишком много кружочков соединены отрезками. Проще рассмотреть те пары, которые *не соединены* — в них-то как раз можно расставить соседние числа. Каждый из двух центральных кружочков не соединён только с противоположным крайним кружочком. Значит, в центральные кружочки нужно расставить «крайние» числа 1 и 8, а в крайние — соседние с ними 2 и 7 соответственно:



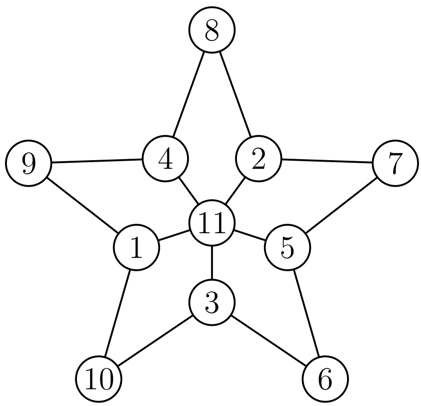
Далее, число 3 можно поставить в один из кружков слева (верхний или нижний — не важно, они симметричны). Оставшиеся числа 4, 5, 6 расставить уже легко:



Проверить решение, предлагаемое школьником, проще всего так: перебрать кружочки с числами в порядке от 1 до 8 и проверить, что никакие два идущих подряд кружочка не соединены.

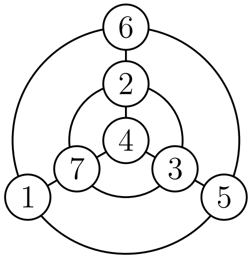
5 Приведём один из подходов к решению (впрочем, содержащий небольшую толику угадывания). Как и в задачах 1–3, сложим суммы по всем лучам ($5 \cdot 25 = 125$) и сравним с общей суммой всех чисел ($1 + 2 + \ldots + 11 = 66$). Разница $125 - 66 = 59$ составлена из пяти чисел на внутреннем контуре звезды (при суммировании мы их посчитали дважды) и учетверённого центрального числа (его мы посчитали 5 раз). Попробуем поставить в центр самое большое число 11 (чтобы не мешалось нам потом при суммировании). Тогда на внутренний контур останется $59 - 4 * 11 = 15$, а это как раз сумма пяти самых маленьких чисел, $1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Таким образом, мы однозначно определили, какие числа стоят на внутреннем контуре.

Теперь определим их порядок, заодно заполнив внешний контур. На внешний контур остаются числа 6, 7, 8, 9 и 10. Каждое из них в сумме с соответствующими двумя числами на внутреннем контуре должно дать $25 - 11 = 14$. Теперь легко подобрать такие суммы: $14 = 6+5+3 = 7+5+2 = 8+2+4 = 9+4+1 = 10+1+3$. Отсюда виден ответ:



6 Опять посчитаем сумму. Сумма чисел от 1 до 7 равна 28; при этом сумма чисел, расположенных на двух окружностях, должна быть равна $2 \cdot 12 = 24$. Значит, оставшееся центральное число есть

$28 - 24 = 4$. Сумма двух оставшихся чисел на каждом луче должна быть равна $12 - 4 = 8$. Поскольку $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$, на каждой окружности должно оказаться по одному числу из каждой из этих пар. Осталось подобрать их так, чтобы суммы по окружностям были по 12: $12 = 2 + 3 + 7 = 6 + 5 + 1$. Это и даёт ответ:



Листок 4. Логично мыслить – не порок

$\boxed{1}$ Зрительный зал в кинотеатре разбит на ряды, в каждом из которых одинаковое число мест. Разбейте утверждения на пары, противоположные по смыслу (то есть, в каждой паре всегда должно быть верно ровно одно из двух утверждений вне зависимости от того, как обстоят дела в кинотеатре):

Во всех рядах все места свободны

Во всех рядах все места заняты

В каждом ряду есть свободное место

В каждом ряду есть занятое место

Есть ряд, в котором все места свободны

Есть ряд, в котором все места заняты

Есть ряд, в котором есть свободное место

Есть ряд, в котором есть занятое место

$\boxed{2}$ Написать утверждения, противоположные по смыслу данным. Стараться при этом не пользоваться словами «не» и «нет». (**Жирным шрифтом** описывается ситуация, а ниже – утверждения, к которым надо написать отрицания.)

а) В ящике находится сто шаров: красные, зелёные, синие.

- Среди любых 10 шаров по крайней мере 3 зелёные.
- Любой шар зелёный.
- Любые два шара разного цвета.
- Среди любых семи шаров есть два разного цвета.
- Есть два шара разного цвета.

б) Компания людей. Некоторые из них знакомы между собой.

- Есть человек, который знаком со всеми.
- Есть человек, который ни с кем не знаком.
- Среди любых 10 людей из этой компании есть хотя бы один, который знает не меньше 5 из этих десяти.
- У любых двоих из них разное количество денег.

в) Корзина с грибами.

- В корзине есть по крайней мере три ядовитых гриба.
- Не менее половины грибов в корзине – ядовитые.
- В корзине есть хотя бы один ядовитый гриб.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Обязательно ли старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков – это один и тот же человек?

б) Обязательно ли лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков – это один и тот же человек?

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** Означают ли одно и то же высказывания «Некоторые сантехники любят рэп» и «Некоторые любители рэпа – сантехники»?

б) Означают ли одно и то же высказывания «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа – сантехники»?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Нет ли логической ошибки в его словах?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Рассмотрим два высказывания.

А: Некоторым Мишиным одноклассникам 12 лет.

Б: Всем Мишиным одноклассникам 12 лет.

Можно ли, ничего не зная про Мишу, утверждать, что: **а)** если верно А, то верно и Б; **б)** если верно Б, то верно и А?

Ответы и комментарии

Это занятие предполагает знакомство школьников с азами формальной логики. Основная цель занятия – научить детей формулировать противоположное высказывание, а также объяснить, что если из A следует B, то это не значит, что из B следует A. К сожалению, этому уделяется недостаточно внимания не только на уроках математики, но и на математических кружках. А жаль: элементарная математическая культура требуется при решении очень многих задач. Кроме того, следующий листок «Доказательство от противного» как раз и предполагает владение подобными навыками.

$\boxed{\textbf{1}}$ Эта задача – вводная часть к задаче 2. Важно, чтобы школьники поняли, как получаются противоположные высказывания друг из друга. Из самой формулировки задания неявно следует, что выражение «все ряды» в противоположном высказывании заменяется на «есть ряд», но желательно развить эту идею до конца и увидеть, что в остальных местах предложения тоже происходит подобная замена.

Во всех рядах все места свободны – Есть ряд, в котором есть занятое место

Во всех рядах все места заняты – Есть ряд, в котором есть свободное место

В каждом ряду есть свободное место – Есть ряд, в котором все места заняты

В каждом ряду есть занятое место – Есть ряд, в котором все места свободны

$\boxed{\textbf{2}}$ Эта задача – очень важная тренировка перед следующим листочком «доказательство от противного». Хорошо, если все школьники на занятии хотя бы частично с ней справятся. Следует отметить, что из любого высказывания A мы можем мгновенно получить противоположное высказывание «Неверно, что A», но в этой задаче нельзя пользоваться подобным трюком. Необходимо получить именно *содержательное* противоположное высказывание, из вида которого понятно, что происходит. Задание неоднозначно: среди противоположных высказываний возможны вариации формулировок, которые означают одно и то же.

а) В ящике находится сто шаров: красные, зелёные, синие.

- Найдутся 10 шаров, среди которых не более чем два – зелёные. (Найдутся 8 не зелёных шаров.)
- Есть красный или синий шар.
- Есть два шара одинакового цвета.
- Найдутся семь шаров одинакового цвета.
- Все шары одинакового цвета.

б) Компания людей. Некоторые из них знакомы между собой.

- Каждый человек с кем-нибудь не знаком.
- Каждый человек с кем-нибудь знаком.
- Найдутся 10 человек, среди которых каждый знает не более четырёх из этих десяти.
- Найдутся двое, у которых одинаковое количество денег.

в) Корзина с грибами.

- В корзине меньше трёх ядовитых грибов.
- Менее половины грибов в корзине – ядовитые.
- В корзине все грибы – съедобные.

3 В этой задаче важно увидеть разницу между пунктами а) и б). Дело в том, что слово «старейший» можно использовать само по себе, а слово «лучший» требует уточнения: лучший *в чём?* В какой области?

а) Да. Рассмотрим множество людей, которые являются одновременно и математиками, и шахматистами. «Старейший математик среди шахматистов» – это старейший человек из данного множества, а «старейший шахматист среди математиков» – тоже старейший человек из данного множества, то есть это один и тот же человек.

б) Нет. В множестве математиков-шахматистов лучший специалист в области математики не обязательно при этом лучше всех играет в шахматы. Поэтому можно привести пример: пусть лучший математик среди шахматистов – это какой-то один человек из этого множества, а лучший шахматист среди математиков – другой.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** Да. Первое высказывание можно переформулировать так: «Найдётся сантехник, который любит рэп», а второе – так: «Найдётся любитель рэпа – сантехник». Нетрудно видеть, что это два одинаковых высказывания

б) Нет. Первое высказывание означает, что если перед нами сантехник, то он любит рэп, а второе, что если перед нами любитель рэпа, то он – сантехник. Эти два высказывания не означают одно и то же: можно придумать пример, когда первое высказывание верно, а второе нет (например, в мире есть два любителя рэпа, один из которых сантехник, а другой нет), либо наоборот.

Вообще говоря, если ребёнок не понимает, что если из A следует B, то это не означает, что из B следует A, можно привести ему какой-нибудь простой пример из жизни.

Верно ли, что все ёлки зелёные? – Да, верно. – То есть, если перед нами ёлка, то она зелёная, так? – Да. – А верно ли обратное? То есть, правда ли, что если перед нами зелёный предмет, то это ёлка? – Нет.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Есть. Здесь наблюдается та же самая ситуация, что в задаче 4б: Денис путает причину и следствие. Ведь если у всех великих людей был плохой почерк, то это не исключает возможности существования не великих людей с тоже плохим почерком. (Если из A следует B, то необязательно из B следует A.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** Нельзя. Пример приводится достаточно легко: пусть в классе у Миши есть люди, которым 12 лет, но также есть люди, которым 11 лет.

б) Нельзя. Многие школьники рассуждают в этой задаче примерно так: «Если сказано, что всем Мишиным одноклассникам 12 лет, то можно взять любого из них – и мы получим, что утверждение А верно». Здесь кроется очень тонкая ошибка. Дело в том, что в этом рассуждении *неявно предполагается*, что хотя бы один одноклассник у Миши имеется. Но если предположить, что Миша – преподаватель математического кружка, то никаких одноклассников у него нет. В этом случае высказывание А, конечно же, ложно, а вот высказывание Б, как ни странно, истинно! Чтобы это понять, надо вспомнить, как мы опровергаем высказывания типа «Все предметы из множества X обладают свойством S». Для этого мы должны явно указать предмет из множества X, который свойством S не обладает. А можем ли мы указать Мишиного одноклассника, которому не 12 лет? Не можем, потому что у Миши вообще нет одноклассников, а значит, нет и контрпримера, то есть опровергнуть высказывание А не удаётся. А значит, ему ничего не остаётся, как быть истинным. Из истинного высказывания А следовать ложное высказывание Б не может.

Листок 5. Доказательство от противного

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 21 человек собирали в лесу орехи. Всего они собрали 200 орехов. Доказать, что найдутся два человека, собравшие поровну орехов.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Имеется 82 кубика. Доказать, что среди них найдётся либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных кубиков.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Взяли несколько одинаковых правильных треугольников и в углах каждого из них написали числа 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться, что сумма чисел, стоящих в каждом углу, равна 55?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что не существует такого числа, которое при делении на 21 даёт остаток 1, а при делении на 14 даёт остаток 3.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Существуют ли такие двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один – 10 партий, три – по 8 партий и два – по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

Ответы и комментарии

Этот листок предполагается дать в качестве продолжения предыдущего листка «Логично мыслить – не порок». По нашим наблюдениям, для учителей математики метод доказательства от противного кажется настолько простым и естественным, что они даже затрудняются предположить, что для школьников это совершенно новая, неочевидная идея. На кружках он представлен обычно слабо: о нём могут сообщить совсем немного, когда рассказывают принцип Дирихле, или же задачи, которые решаются с помощью доказательства от противного, могут быть добавлены руководителем кружка в листочек с совершенно другой тематикой. Между тем многие школьники испытывают затруднения даже с тем, чтобы *сформулировать* противоположное высказывание, а сам метод от противного для них остаётся надолго, если не навсегда, просто магическим заклинанием. Авторы недовольны такой ситуацией и потому считают необходимым объяснение этого метода на отдельном занятии.

Во всех задачах, когда ребёнок рассказывает решение, необходимо услышать от него внятную формулировку высказывания, противоположного тому, которое требуется доказать, а также, в чём именно состоит противоречие. В начале занятия стоит рассказать суть этого метода: формулируем высказывание, противоположное тому, которое надо доказать $\to$ путём рассуждений выводим из него противоречие $\to$ после этого делаем вывод, что первоначальное предположение ложно, а значит, истинно его отрицание ($=$ требуемое высказывание). Также можно разобрать первую задачу у доски в самом начале занятия либо спустя минут 15 после его начала, если школьники плохо решают листочек.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Предположим противное: все рабочие смогли купить магнитофон. Это означает, что каждый получил не менее 320 рублей. Значит, все получили не менее 1600 рублей. Но зарплата всех пятерых рабочих равна 1500 рублей. Противоречие. Следовательно, исходное предположение неверно, а верно его отрицание: найдётся рабочий, который не смог купить магнитофон. А это то, что требовалось доказать.

Задача очень простая, но и тут есть подводные камни: школьник может сказать «1500 поделить на 5 равно 300, а это меньше 320». В таком «решении», во-первых, отсутствует строгое рассуждение, а во-вторых, не совсем ясно, что означает число 300 и какое отношение оно имеет к задаче. Также можно ошибиться, сказав не «не менее 320 рублей», а «ровно 320 рублей». Тогда противоречие тоже вроде как получается, но проблема в том, что противоположное высказывание сформулировано некорректно, а школьник разобрал всего лишь 1 пример, но не общую ситуацию.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Предположим, что такие два человека не найдутся. Упорядочим людей по количеству собранных орехов, от самого большого до самого маленького. Тогда первый человек собрал не менее 0 орехов, второй – не менее 1, третий – не менее 2, ..., двадцать первый – не менее 20. Тогда всего у этих людей не менее $0+1+2+\ldots+20 = 210$ орехов. Но по условию они собрали 200 орехов. Противоречие.

Возможные ошибки: можно начать счёт не с 0, а с 1 (тогда первый собрал не менее 1 ореха, второй – не менее двух,...). Как и в прошлой задаче, вместо «не менее двух орехов» можно сказать «ровно два ореха».

$\boxed{\mathbf{3}}$ Предположим противное: пусть всего имеется не более 9 цветов, и кубиков каждого цвета тоже не более 9. Тогда всего не более 81 кубика, но у нас их 82. Противоречие.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Предположим противное: сложить треугольники таким образом удалось. Пусть оказалось, что всего выложено N треугольников. На каждом треугольнике написаны числа 1, 2, 3, значит, сумма чисел на одном треугольнике равна 6, а на всех треугольниках – $6N$. С другой стороны, так как сумма чисел в каждом углу равна 55, то сумма чисел во всех трёх углах равна $55 \cdot 3 = 165$. Получаем уравнение: $6N = 165$. Это уравнение не имеет решения в натуральных чисел. Противоречие.

Отметим, что эта задача содержит также идею «подсчёт двумя способами».

$\boxed{\mathbf{5}}$ Предположим, что такое число найдётся. Заметим, что если оно даёт остаток 1 при делении на 21, то оно имеет вид $21a + 1$. Аналогично, если это число даёт остаток 3 при делении на 14, то оно имеет вид $14b+3$. Можно написать равенство: $21a+1=14b+3$. Преобразовав это выражение, имеем: $7(3a-2b)=2$. Левая часть этого равенства делится на 7, а правая – нет. Противоречие.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Предположим, что это возможно и $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{abcd}$. Имеем следующую цепочку:

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{abcd}=\overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}>\overline{ab}\cdot\overline{cd}+\overline{cd}>\overline{ab}\cdot\overline{cd}.$$

(Первое неравенство мы получили из того, что любое двузначное число меньше 100.) Противоречие.

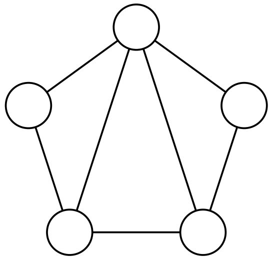
$\boxed{\mathbf{7}}$ Предположим, что барон оказался прав. Всего в турнире приняло участие 8 человек. Если бы турнир происходил без переигровок, то каждый сыграл бы по 7 партий (со всеми, кроме себя). Значит, переигранных партий сыграли столько: два человека по 4 партии, один – 3 партии, три – по одной партии и двое не переигрывали ни одной партии. Те двое, которые сыграли между собой по 4 партии, либо играли друг с другом, либо нет. В первом случае они сыграли с остальными 6 партий, а во втором – восемь, то есть получается, что они играли с остальными четырьмя людьми не менее шести партий. Заметим, что остальные участники турнира сыграли всего 6 партий. Значит, они все эти партии играли с теми, кто переигрывали 4 партии. Но тогда они должны были сыграть ровно по 2 партии. Противоречие.

Листок 6. Степени двойки

1 В старом английском саду в пруду растёт кувшинка. Каждую ночь она увеличивается ровно вдвое. Через 100 ночей она заполнила весь пруд.

а) За сколько ночей кувшинка заполнила половину пруда?

б) Если бы кувшинок было 4, а не одна, за сколько ночей они бы заполнили пруд?



2 Впишите в пять кружков на рисунке натуральные числа так, чтобы выполнялись два условия: 1) если два кружка соединены линией, то стоящие в них числа должны отличаться ровно в два или ровно в четыре раза; 2) если два кружка не соединены линией, то отношение стоящих в них чисел не должно быть равно ни 2, ни 4.

3 Расставьте в клетках таблицы 3×3 числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 512 так, чтобы произведения по всем вертикалям, горизонталям и обеим большим диагоналям были равны.

4 У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берёт себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что все овцы собрались у одного крестьянина.

5 Первоклассник учится чистописанию по следующей системе: в день начала обучения он написал одну букву, а в каждый следующий день он пишет вдвое больше букв, чем писал в предыдущий день. Что больше и на сколько: число букв, которое он напишет завтра, или общее число букв, которое написал до сегодняшнего дня включительно?

6 Малыши играют в «магазин». Они нарисовали всего шесть купюр, каждая достоинством в некоторое целое число рублей. Оказалось, что с помощью этого набора купюр можно заплатить без сдачи любую сумму от 1 до 63 рублей. Как им это удалось?

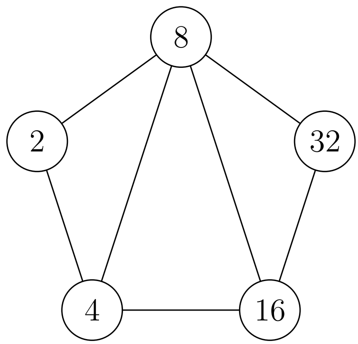
Ответы и комментарии

В начале занятия советуем обратить внимание школьников на тему листочка и рассказать, что такое степени двойки — числа вида $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}}$. Также сто́ит рассказать и о двоичной системе исчисления. В ней всего две цифры — 0 и 1 — и всякое число можно представить в виде суммы некоторого количества степеней двойки. А именно, надо выбрать в точности те степени, на соответствующим которым местам в двоичной записи стоят единицы. Например, число 22 равно $16+4+2 = 2^4+2^2+2^1$ — значит, в двоичной записи оно записывается как 10110.

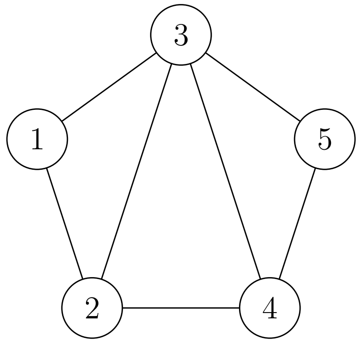
$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Каждую ночь кувшинка становится в два раза больше. Значит, если «отмотать» ночь назад, то она уменьшится вдвое. Ответ: кувшинка заполнит половину пруда за 99 ночей. Соответственно, после 98 ночей она заполняла $^1/_4$ пруда, после 97 — $^1/_8$, и так далее. Изначально кувшинка имела площадь $^1/_{2^{100}}$ площади пруда.

б) Четыре кувшинки заполняют $4 \cdot \frac{1}{2^{100}} = \frac{1}{2^{98}}$ от площади пруда, значит, весь пруд они заполнят за 98 ночей. Без вычислений это можно объяснить так: чтобы стать по площади как 4 кувшинки, одной кувшинке надо две ночи ($1 \to 2 \to 4$). Значит, 4 кувшинки «стартуют с форой» в 2 ночи, и, следовательно, «финишируют» на две ночи раньше, чем одна кувшинка.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решить эту задачу поможет тема листочка — «степени двойки». Степенями двойки и нужно заполнить кружки:



Заметим, что задача немного упрощается, если вместо самих степеней двойки записывать в кружочки их показатели (1 вместо 2, 3 вместо 8, 6 вместо 64 и т.п.). Тогда наша цель формулируется так: записать в кружки натуральные числа так, чтобы (1) если два кружка соединены линией, то стоящие в них числа отличаются на 1 или на 2; (2) если не соединены, то либо совпадают, либо отличаются больше чем на 2:



Эта операция называется *логарифмированием* (по основанию 2). Исходная картинка получается из логарифмированной заменой каждого числа k на 2^k.

3 Идея перехода от степени двойки к её показателю (логарифмирования) поможет и в этой задаче. Вычислять произведения больших чисел неудобно, но мы воспользуемся тем, что $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$, и перейдём к суммам: если заполнить квадрат числами 1, 2, 3, …, 9 так, чтобы *суммы* чисел по вертикалям, горизонталям и большим диагоналям совпадали и потом заменить эти числа на 2, 4, 8, …, 512 соответственно, то совпадать будут уже *произведения*. Задачу про суммы решить намного проще — ответом является классический *магический квадрат:*

2	7	6
9	5	1
4	3	8

После замены получаем решение исходной задачи:

4	128	64
512	32	2
16	8	256

$\boxed{\mathbf{4}}$ Заметим, что после первого раскулачивания у каждого крестьянина окажется чётное число овец: у раскулаченного — 0 (а ноль — чётное число), а у остальных — вдвое больше, чем было вначале. После второго раскулачивания число овец уже делится на 4, после третьего — на 8, ..., после седьмого — на $2^7 = 128$. Из чисел, не превосходящих 128, на 128 делятся только само число 128 и ноль. Значит, все 128 овец окажутся у одного хозяина.

Если эта задача вызвала у школьников затруднения, сто́ит аккуратно намекнуть на идею чётности и делимости; после этого им станет намного проще.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Эта задача иллюстрирует известное равенство $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$; ответ: завтра первоклассник напишет на одну букву больше, чем написал до сегодняшнего дня включительно.

Подойти к этому можно двумя способами. Способ первый — рассуждать в двоичной системе счисления (не зря же мы о ней говорили в начале занятия!). Тогда число решённых задач запишется как $\underbrace{11\ldots11}_{n}$, что на единицу меньше, чем $1\underbrace{00\ldots00}_{n}$ — точно так же, как в привычной нам десятичной системе $\underbrace{99\ldots99}_{n} = 1\underbrace{00\ldots00}_{n} - 1$.

К другому способу школьники могут прибегнуть, если не догадаются до первого. Как обычно, если в задаче фигурирует неизвестное n (в нашем случае это количество дней, прошедших с начала учения) и это затрудняет решение, посоветуйте школьникам начать с конкретных маленьких значений: $n = 1, 2, 3, \ldots$. Школьники довольно быстро угадают ответ: $1 = 2 - 1$, $1 + 2 = 3 = 4 - 1$, $1+2+4 = 7 = 8-1, \ldots$ Как же доказать, что закономерность сохранится и дальше? Для этого достаточно перенести 1 в левую часть, и тогда сумма быстро «свернётся»: например, при $n = 5$ получаем $1+1+2+4+8+16+32 = 2+2+4+8+16+32 = 4+4+8+16+32 = 8 + 8 + 16 + 32 = 16 + 16 + 32 = 32 + 32 = 64$. Ясно, что так будет происходить при любом числе дней.

При разборе задачи мы советуем начать со второго способа, а потом рассказать первый в качестве иллюстрации, как новое математическое понятие (двоичная система) помогает упростить решение задачи. Первый способ также стоит рассказать школьнику, решившему задачу другим способом. Кстати, это поможет ему решить следующую задачу.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Эта задача — в чистом виде иллюстрация двоичной системы счисления: купюрами в 1, 2, 4, 8, 16 и 32 рубля можно заплатить любую сумму от 1 до 63. Для этого нужно записать её в двоичной системе и взять купюры, соответствующие разрядам, в которых стоят единицы. Например, 22 рубля можно отсчитать купюрами в 16, 4 и 2 рубля (вспомним, что в двоичной системе 22 записывается как 10110).

Листок 7. Оценка+пример

$\boxed{\mathbf{1}}$ Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какое максимальное число **а)** ладей; **б)** слонов можно разместить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

$\boxed{\mathbf{3}}$ 8 кузнецов должны подковать 10 лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите: лошадь не может стоять на двух ногах!)

$\boxed{\mathbf{4}}$ В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: **а)** в любом квадратике 2×2; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Двоим людям нужно добраться из деревни Ромашково в деревню Красново. Расстояние между деревнями 30 км. Каждый из них может идти со скоростью 5 км/ч, а также у них есть одноместный велосипед, который может ехать со скоростью 15 км/ч. За какое наименьшее время они оба смогут оказаться в Красново? Бежать никому нельзя.

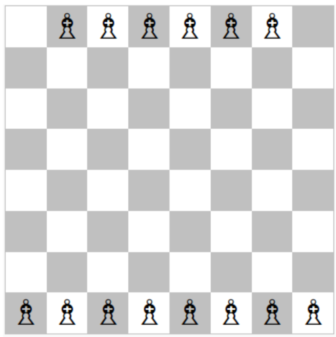
Ответы и комментарии

В начале занятия расскажите школьникам, что во всех задачах этого листочка ставится вопрос: «Найдите наибольшее (наименьшее) число такое, что ...». Это означает, что решение должно состоять из двух частей. Во-первых, нужно привести *пример*, на котором это наибольшее (наименьшее) число достигается. Во-вторых, нужно доказать *оценку*: объяснить, почему больше (меньше) никак не получится. Если в решении школьника присутствует только одна из этих частей, помогите ему разобраться, что именно он только что рассказал (оценку или пример) и сообщите, что для полного решения ему не хватает второй части.

$\boxed{\mathbf{1}}$ На доске 8×8 всего 64 клеточки, а в уголке 3 клеточки. Значит, всего получается не более 21 уголка (так как $\dfrac{64}{3} = 21$(ост. 1)). Пример с 21 уголком легко строится.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** *Оценка.* На доске 8×8 имеется 8 горизонталей. На каждой из них может стоять не более 1 ладьи. Значит, всего может быть не более 8 ладей. *Пример.* 8 ладей разместить можно: поставим их на одну из главных диагоналей (есть много других примеров).

б) *Оценка.* На доске 8×8 имеется 15 параллельных друг другу диагоналей. На каждой диагонали может стоять не более одного слона, значит, слонов не более 15. Кроме того, 2 из этих диагоналей одноклеточные, так что, если можно было бы привести пример с 15 слонами, то 2 слона на этих одноклеточных диагоналях друг друга бы били (либо они били бы другого слона, который стоит на главной диагонали, содержащей эти две клетки). Следовательно, 15 слонов поставить нельзя, то есть их не более 14. *Пример.* См. рисунок.



$\boxed{\mathbf{3}}$ *Оценка.* Нужно подковать 10 лошадей, то есть требуется 40 подков. Кузнецов 8, поэтому каждый сделает не менее $\dfrac{40}{8} = 5$ подков, итого получается не менее $5 \cdot 5 = 25$ минут.

Пример. Покажем, как уложиться в 25 минут. Разобьём кузнецов и лошадей на 2 группы по 5 лошадей и 4 кузнеца в каждой. Опишем, что происходит в одной из групп (во второй группе будет тот же самый процесс). Сначала кузнецы подковывают первую, вторую, третью и четвёртую лошадь. Следующие 5 минут – вторая, третья, четвёртая и пятая лошади. Далее первая, третья, четвёртая и пятая лошади. Затем первая, вторая, четвёртая и пятая лошади. И последние 5 минут – первая, вторая, третья и пятая лошади. (Идея примера: сначала подковываем первых четырёх лошадей, а затем «идём по кругу».)

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Пример.* Покажем, как сделать сытыми 9 щук. Пусть некоторые 7 щук съедят каждая по 3 других щуки. После этого останутся всего 9 щук: эти 7 сытых и ещё 2 голодных. Далее пусть 2 оставшихся голодных щуки съедят по 3 сытых щуки. Итого получилось 9 сытых щук.

Оценка. Докажем, что 10 щук сделать сытыми не получится. Действительно, если бы это было возможно, то было бы съедено не менее 30 щук. А всего в пруду имеется 30 щук. Значит, были бы съедены вообще все щуки, чего не может быть.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *Оценка.* В обоих пунктах разбиваем доску 8×8 на 16 квадратиков 2×2. В пункте **а)** в каждом из этих квадратиков должна быть хотя бы одна закрашенная клетка (откуда получаем оценку 16 клеток), а в пункте **б)** – хотя бы две, иначе в этом квадратике нашёлся бы незакрашенный уголок из трёх клеток (откуда получаем оценку 32 клетки).

Пример. Покажем, что эти оценки достигаются. **а)** Красим левую верхнюю клетку каждого квадратика 2×2. **б)** Красим первый, третий, пятый и седьмой столбцы доски.

$\boxed{\mathbf{6}}$ *Пример.* Первый едет на велосипеде половину пути, бросает велосипед и дальше идёт пешком. Второй идёт пешком половину пути, подбирает велосипед и вторую половину едет на нём. Они оба доберутся в Красново за 4 часа (путь на велосипеде занимает $\dfrac{15\ \text{км}}{15\ \text{км/ч}} = 1$ час, а путь пешком $\dfrac{15\ \text{км}}{5\ \text{км/ч}} = 3$ часа).

Оценка. Очевидно, что идти или ехать назад невыгодно (это только увеличит время пути), ехать на велосипеде назад, чтобы передать его, тоже невыгодно (так как можно было бы оставить велосипед в нужной точке, от этого время пути только уменьшится). Значит, на велосипеде можно ехать только вперёд. Первый и второй человек преодолеют на велосипеде некоторую часть пути, в сумме эти две части не превосходят единицы (поскольку велосипед одноместный). Если бы кто-то из них ехал на велосипеде меньше половины пути, то он бы добрался до Красново дольше, чем за 4 часа. Значит, каждый из них должен ехать ровно половину.

Листок 8. Взвешивания

$\boxed{\mathbf{1}}$ Среди **а)** 8; **б)** 32; **в)** 42 камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера для любой кучки камней можно проверить, есть ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Имеется **а)** 3; **б)** 27; **в)** 50 внешне одинаковых монет, из которых одна — фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая легче. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выявить фальшивую монету? *Чашечные весы* позволяют установить, какая из двух кучек монет тяжелее, или что их веса равны.

В задачах 1 и 2 требуется не только указать последовательность взвешиваний (проверок), но и *доказать,* что меньшим их количеством обойтись нельзя.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Из девяти внешне одинаковых монет 7 весят по 2 грамма, одна — 1 грамм, и ещё одна — 4 грамма. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выявить четырёхграммовую монету?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Имеется 50 мешков, в каждом по 1000 монет. В 49 мешках монеты настоящие, а в одном — фальшивые. Известно, что настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Одним взвешиванием на электронных весах определите, в каком мешке фальшивые монеты. *Электронные весы* позволяют определить вес произвольного набора монет.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Паша загадал натуральное число a от 1 до 8. Витя может назвать любое число x, и Паша ответит, верно ли, что x делится на a. Помогите Вите угадать a, задав три таких вопроса.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Имеется одна заведомо настоящая монета и 5 подозрительных, среди которых одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих (при этом неизвестно, тяжелее она или легче). Внешне подозрительные монеты неразличимы. **а)** Как найти фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах без гирь? **б)** Можно ли это сделать, если подозрительных монет не 5, а 6?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Каждое измерение счётчиком Гейгера даёт нам два варианта — «есть радиоактивный» или «нет радиоактивного» — как говорят, *один бит* информации. Значит, k измерений дадут нам 2^k вариантов результата. Поэтому, чтобы найти один камень среди восьми, нужно как минимум 3 измерения; чтобы найти среди 32 — как минимум 5 измерений, и так далее.

Это соображение даёт нам *оценку снизу* на количество измерений. Осталось привести *пример* — метод измерений, который заведомо позволит выявить радиоактивный камень. Самый простой способ — *метод деления пополам.* Если число камней есть 2^k, то на каждом шаге мы разбиваем камни на две одинаковые группы и определяем, в какой из них радиоактивный. Заведомо нерадиоактивные камни откладываем в сторону, а с оставшимися повторяем процедуру до тех пор, пока останется один камень. Всего на это потребуется k измерений.

Таким образом, в пункте **а)** ответ 3, в пункте **б)** — 5. Пункт **в)** немного сложнее, потому что 42 не является степенью двойки. Оценка снизу даётся так же, как и раньше: нужно хотя бы 6 измерений (поскольку $2^5 = 32 < 42$, пяти не хватит). В качестве примера опять же работает метод деления пополам. Проще всего объяснить его так: мысленно добавим 22 виртуальных камня (заведомо нерадиоактивных) и будем действовать, как будто камней 64. (В реальных измерениях вместо виртуального камня будет пустое место.) Таким образом мы выявим радиоактивный камень за 6 измерений.

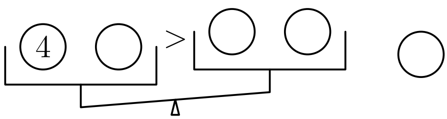
Ясно, что это рассуждение можно сформулировать в общем виде: если камней n, то для выявления радиоактивного необходимо и достаточно совершить k измерений, где k – наименьшее число, для которого $2^k \geqslant n$.

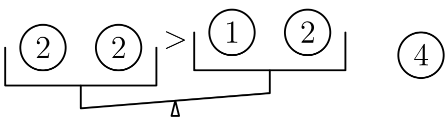
$\boxed{\mathbf{2}}$ Здесь, в отличие от предыдущей задачи, при каждом взвешивании возможны три различных ответа: «левая чашка тяжелее», «правая чашка тяжелее», «веса равны». Значит, вместо степеней двойки надобно рассматривать степени тройки. Идея та же: разбиваем монеты на три одинаковые группы, два кладём на чашки весов, а третью оставляем в стороне. Тогда, если веса оказались равны, единственная фальшивая монета в третьей группе. Иначе — там, где легче. Таким образом выявить фальшивую среди 3^k монет можно за k взвешиваний. Оценка снизу даётся так же, как и в предыдущей задаче: за k взвешиваний можно получить не более, чем 3^k разных ответов.

Значит, ответ в пункте **а)** — 1, в пункте **б)** — 3. В пункте **в)** нижняя оценка будет 4 ($3^3 < 50 \leqslant 3^4$), а взвешивания происходят следующим образом: каждый раз разбиваем на три кучки, причём, если число не делится на 3, то дополняем до того, которое делится, а разницу вычитаем из третьей кучки. Например, $50 = 51 - 1 = 17 + 17 + 16$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Положим сначала на чашки весов по 4 монеты; одна монета останется в стороне. Сравняться чашки не могут; ясно, что на той чашке, которая легче, монета в 4 г быть не может. Значит, круг поисков сужается до 5 монет (тех, которые на тяжёлой чашке, плюс которая в стороне); 4 монеты с лёгкой чашки убираем совсем, они нам больше не понадобятся.

Для второго взвешивания положим из этих пяти по 2 монеты на чашки весов; одна останется. Если две чашки уравновесились, то 4-граммовая монета — оставшаяся пятая монета. Если одна из чашек оказалась тяжелее, то возможны следующие ситуации:

(а) 

(б) 

Расположение монет внутри чашки не имеет значения; пустой кружок означает произвольную монету. В ситуации (а) важно, что монета в 4 г всегда перевешивает, даже если другая монета в той же чашке весит 1 г ($4 + 1 > 2 + 2$).

Третьим взвешиванием сравним две монеты из более тяжёлой чашки. Если одна из них тяжелее, то мы в ситуации (а), и эта более тяжёлая монета и есть 4-граммовая. Если же чашки уравновесились, то остаётся только ситуация (б), и тогда 4-граммовая монета — та пятая, которую мы оставили в стороне при втором взвешивании.

Эта задача, вероятно, самая сложная в листочке. Подсказать школьникам можно следующим образом: чтобы управиться за малое число иваний, нужно постараться сразу отсечь как можно больше монет, заведомо не 4-граммовых. В изложенном выше решении мы сумели сразу отбросить 4 монеты.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Выберем из первого мешка одну монету, из второго — две, из третьего — три, и так далее. Из пятидесятого мешка будет взято 50 монет. Всего монет $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = 1275$, и если бы они были настоящие, то их суммарный вес был бы равен 12 750 г. Разница между этим «идеальным» весом и реальным (в граммах) и даст номер мешка, где монеты на 1 г легче. Число монет можно немного уменьшить, если начать нумерацию не с 1, а с 0.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Как и в первой задаче, каждый вопрос должен разбивать поле перебора ровно пополам. Этого можно добиться, например, следующим образом Зададим сначала два вопроса: 1) верно ли, что 6 делится на a; 2) верно ли, что 8 делится на a. По ответам на эти вопросы варианты разбиваются следующим образом:

$6 \,\vdots\, a$?	$8 \,\vdots\, a$?	$a = \ldots$
да	да	1 или 2
да	нет	3 или 6
нет	да	4 или 8
нет	нет	5 или 7

Осталось выбрать число из двух. Это всегда можно сделать одним вопросом «верно ли, что x делится на a?»: для этого в качестве x можно взять меньшее из чисел в паре. Это число всегда делится на себя, но не делится на второе — большее — число.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В пункте **а)** можно действовать следующим образом: занумеруем подозрительные монеты цифрами от 1 до 5; цифрой 0 обозначим настоящую монету. Сначала сравним монеты 0 и 1 с монетами 2 и 3. Если весы уравновесились, то фальшивая — либо 4, либо 5. Сравним 4-ю монету с настоящей: если уравновесилась, то фальшивая 5-я, если нет — то 4-я. Если весы не уравновесились, то 4 и 5 заведомо настоящие, а фальшивая — одна из 1, 2, 3. Сравним 1 и 2 с 4 и 5. Если весы уравновесились, то фальшивая — 3-я монета. Если нет — фальшивая либо 1-я, либо 2-я. Как же определить, какая именно? Поскольку 4 и 5 заведомо настоящие, мы знаем, будет ли фальшивая монета легче (т.е. 4 и 5 перевесили 1 и 2) или тяжелее настоящей. Посмотрим ещё раз на результат первого взвешивания. В нём монеты 1 и 2 лежали на разных чашках. Если фальшивая монета тяжелее, то она лежала на той чашке, которая перевесила, если легче — наоборот. Так мы узнаем, какая из монет 1 и 2 фальшивая.

Решение пункта **б)** состоит в более тонком подсчёте количества информации с использованием *симметрии.* Прежде всего заметил, что при первом взвешивании различие между положениями «левая чашка тяжелее» и «правая чашка тяжелее» на самом деле не даёт нам никакой информации, поскольку эти два случая симметричны относительно замены более лёгкой фальшивой монеты на более тяжёлую. Таким образом, существенно различных ответов на первое взвешивание не 3, а 2: равны или не равны. В первом случае та же симметрия применимо и ко второму взвешиванию, таким образом, и оно даёт только 2 существенно разных ответа. Во втором случае второе взвешивания даёт 3 разных возможных ответа. Итого, существенно разных возможных вариантов будет $2 + 3 = 5$. Значит, выявить фальшивую монету из 6 не получится.

Листок 9. Intermezzo

$\boxed{\mathbf{1}}$ Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Существует ли самопересекающаяся **а)** пятизвенная; **б)** десятизвенная; **в)** 1000-звенная замкнутая ломаная, каждое звено которой пересекается ровно с двумя другими (причём не в вершине)?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Король хочет построить 6 крепостей и соединить их прямолинейными дорогами так, чтобы каждая дорога соединяла ровно две крепости, из каждой крепости выходило ровно четыре дороги, никакие три крепости не стояли на одной прямой и никакие две дороги не пересекались. Возможно ли это?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В некоторой стране 10 городов, каждый соединён авиалиниями ровно с 3 другими городами, и из каждого города в любой другой можно долететь, совершив не более одной пересадки. Нарисуйте схему авиалиний этой страны.

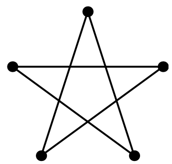
$\boxed{\mathbf{5}}$ Летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся. Остальные летели дальше. Все гуси сели на 10 озёрах. Сколько всего гусей было в стае?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 648 метров. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

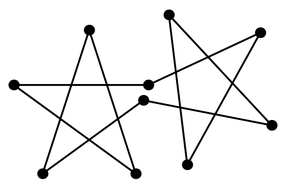
Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Подсказка к этой задаче такая: попробуйте сначала придумать 3 таких числа. Это легко: $1 + 2 + 3 = 6$, и это число делится на 1, 2 и 3. Теперь добавим число 6 к имеющимся трём числам: $1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Получили 4 числа с требуемым свойством. Далее можно продолжать в том же духе: добавляя к набору чисел его сумму, мы получаем набор с вдвое большей суммой, которая делится на все числа исходного набора, а также на добавленное число. В итоге получаем ответ: 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решение пункта **а)** — пятиконечная звезда:

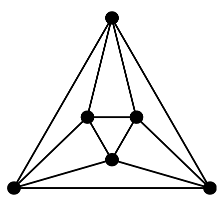


Для пункта **б)** достаточно собрать ломаную из двух пятиконечных звёзд:

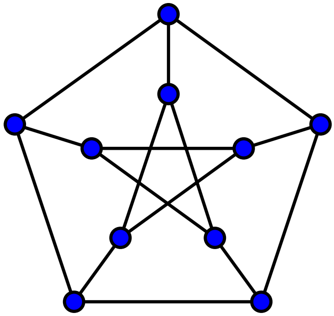


Решение пункта **в)** даётся цепочкой из 200 пятиконечных звёзд, соединённых таким же образом.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Да, возможно:



$\boxed{\mathbf{4}}$



Этот граф называется *графом Петерсена.* Будьте внимательны при проверке: граф Петерсена можно изобразить многими изоморфными способами.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Если задача про гусей вызывает затруднения (например: как это полгуся могут летать?!), предложите школьникам начать с малого количества озёр. Если озеро одно, то на нём должны сесть все гуси. Значит, половина гусей — это полгуся, а всего гусь был один. Если озера два, то на втором сел один, последний гусь, а на первом — два (в стае всего было 3 гуся, село полтора и ещё полгуся). Так можно «раскручивать» число гусей, двигаясь назад от последнего озера: каждый раз надо прибавить полгуся и умножить на 2 — или, что то же, сначала умножить на 2, а потом прибавить целого гуся. Итак, перед третьим озером гусей было $3 \cdot 2 + 1 = 7$, перед четвёртым: $7 \cdot 2 + 1 = 15$, ... перед десятым — 1023 гуся.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Если простых людей p, а творческих — t, то окончательная длина хвоста будет равна $2^p \cdot 3^k$. Число 648 раскладывается на множители (по основной теореме арифметики — единственным образом!) как $2^5 \cdot 3^3$. Значит, $p = 5$, $k = 3$.

Листок 10. Знание — сила!

1 Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. (Также Илья знает, что монет всего 6, по 3 каждого металла, и что каждому досталось по две монеты.) Требуется задать Илье Муромцу один вопрос, предполагающий ответ „да“ или „нет“, и по ответу на этот вопрос выяснить, какие монеты ему достались.

2 Несколько детей вернулись с прогулки, и папа сказал, что у некоторых (хотя бы у одного) из них лица перепачканы грязью. Каждый ребёнок видит лица других детей, но не свое собственное. Папа спрашивает, знает ли кто-нибудь из детей, что он сам чумазый. Дети отвечают „нет“. Потом папа задает тот же вопрос еще раз, потом еще раз... Поймет ли кто-то из детей, что он сам чумазый?

3 Король позвал к себе трёх мудрецов и посадил их так, чтобы они видели друг друга, но не себя. После этого он показал им 3 красных и 2 белых колпака и сказал, что наденет на каждого один из этих колпаков. Сделав это (и спрятав оставшиеся два колпака), король спросил по очереди у каждого из мудрецов, знает ли он цвет колпака, который на него надет. Первый и второй мудрец ответили „нет“, а третий сказал, что знает. Какого цвета колпак король надел на третьего мудреца?

4 Каждому из двух гениальных математиков сообщили по натуральному числу, причем им известно, что эти числа отличаются на единицу. Они поочередно спрашивают друг друга: „Известно ли тебе моё число?“ Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит „да“. Сколько вопросов они зададут друг другу? (Математики предполагаются правдивыми, бессмертными, и, разумеется, гениальными).

5 Встречаются два приятеля — математика:

— Ну как дела, как живешь?

— Все хорошо, растут два сына дошкольника.

— Сколько им лет?

— Произведение их возрастов равно количеству голубей возле этой скамейки.

— Этой информации мне недостаточно.

— Старший похож на мать.

— Теперь я знаю ответ на твой вопрос.

Сколько лет сыновьям?

6 При дворе короля Правдоруба все издревле говорили только правду и доверяли друг другу... но однажды король пригласил к себе трёх своих придворных мудрецов и объявил им: „Среди вас хотя бы один — лжец!“ Мудрецы задумались: кто же среди них предатель? Кто нарушил древний обычай?.. Король спросил первого мудреца: „Знаешь ли ты, кто из вас лжецы, а кто говорит правду?“ Первый мудрец ответил: „Не знаю“. Король задал тот же вопрос второму мудрецу. Тот ответил: „Знаю“. Наконец, третьего мудреца король спросил: „Сможешь ли ты назвать хотя бы одного лжеца?“ На это третий мудрец ответил: „Да, смогу“. А кто на самом деле лжец?

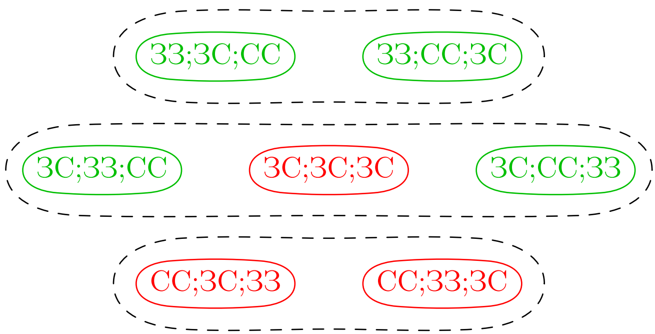
Ответы и комментарии

Задачи этого листочка слегка необычны с математической точки зрения: в них нам будет интересно не только *истинны* ли некоторые высказывания или ложны, но также *знают* ли об истинности этих высказываний персонажи, действующие в задаче. Такого рода задачи относятся к *модальной логике* — таким образом, этот листок знакомит школьников с азами этой науки.

1 С виду кажется, что задача неразрешима: вариантов того, какие монеты у Ильи, три (две золотые, две серебряные, золотая и серебряная), а вариантов ответа всего два, „да“ или „нет“. Но есть и третий возможный ответ — „не знаю“ (эту подсказку можно аккуратно дать школьнику, заявляющему, что задача неразрешима из соображений количества информации, как в листочке про взвешивания). Чтобы получить этот ответ, нужно спрашивать Илью не о тех монетах, которые есть у него. (Таким образом, если школьник предлагает какой-либо вопрос, обращённый только к тем монетам, которые есть у Ильи, его решение заведомо неверно — однако всё равно нужно потратить усилия, чтобы объяснить школьнику, где именно ошибка. Заодно можно дать небольшую подсказку.) Получить ответ „не знаю“ можно разными способами. Например, один из них, предложенный школьниками на Малом мехмате, таков: „Если князь заберёт у тебя одну монету назад, останется ли у тебя золотая монета?“ (Если у Ильи разные монеты, то он не знает, какую именно заберёт князь; если монеты одинаковые, ответ будет однозначным.) Ниже мы аккуратно разберём одно из возможных решений — однако при обсуждении задачи со школьниками могут возникать самые неожиданные альтернативные решения!

Самый простой способ получить ответ „не знаю“ — спрашивать не о монетах Ильи, а о монетах других богатырей. Однако тогда может показаться, что ответ будет всегда „не знаю“: ведь даже в условии прямо сказано, что Илья Муромец не знает о монетах Добрыни и Алёши. Тем не менее, некоторую информацию об этих монетах Илья может вычислить, зная только свои монеты. Например, если у Ильи Муромца две золотые монеты, то он знает, что осталась только одна золотая монета. Значит, ни у Добрыни, ни у Алёши не может оказаться двух золотых монет. Зато заведомо у кого-то из них обе монеты серебряные. Это соображение и приводит нас к ответу: нужно задать вопрос „Верно ли, что у кого-то их двух других богатырей обе монеты — серебряные?“

Запишем возможные ситуации коротко: буква «З» означает золотую монету, «С» серебряную; сначала монеты Ильи, потом Добрыни, потом Алёши. Например, «ЗЗ;СС;ЗС» означает, что у Ильи 2 золотые монеты, у Добрыни 2 серебряные, а у Алёши — золотая и серебряная. На рисунке ниже возможные ситуации разделены на три группы. В каждой группе ситуации неразличимы с точки зрения Ильи Муромца: он-то видит только свои монеты. Кроме того, ситуации расцвечены: зелёным цветом обозначены те, в которых истинный ответ на наш вопрос «да»; красным — в которых «нет».



Теперь видно, что в средней группе, когда у Ильи золотая и серебряная монеты, есть как «красные», так и «зелёные» ситуации. Значит, Илья даже теоретически не может, опираясь на знания о своих монетах, ответить на вопрос, и он скажет „не знаю“. В верхней группе обе ситуации «зелёные», и Илья, проведя такое же рассуждение, как и мы сейчас, ответит „да“. В нижней группе, наоборот, обе ситуации «красные», и ответ будет „нет“.

Чтобы наши рассуждения имели силу, нужны два предположения о богатыре, которого мы спрашиваем (обратите на это внимание школьников при разборе задачи!):

1. Богатырь *честен,* т.е. отвечает на наши вопросы правдиво.

2. Богатырь *умён,* т.е. говорит „не знаю“ только в том случае, когда получить ответ, исходя из доступной ему информации, теоретически невозможно. Это условие позволяет Илье Муромцу использовать *косвенное знание* о монетах других богатырей.

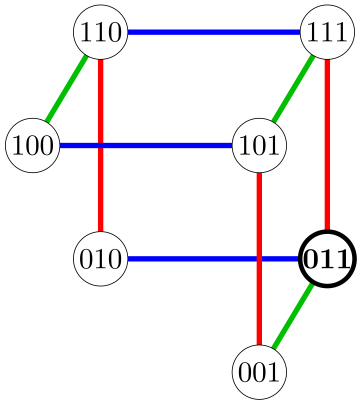
Второе условие не так безобидно, как может показаться на первый взгляд. Чтобы осознать это, посмотрим, например, на шахматную игру и зададимся вопросом: у какого из игроков (чёрных или белых) есть стратегия, позволяющая заведомо, независимо от коварства противника, выиграть или хотя бы свести игру к ничьей? Количество всевозможных шахматных партий, хоть и астрономически велико, но всё-таки не бесконечно. Значит, теоретически возможно проанализировать все возможные партии и дать ответ на этот вопрос (кроме этого, можно доказать, что либо у одного — и, разумеется, ровно у одного — из игроков есть выигрывающая стратегия, либо у обоих есть стратегия, приводящая к ничьей). Этот ответ будет логически следовать из правил игры, то есть, по нашему условию, должен быть известен любому, кто эти правила знает. В реальности, однако, ответ неизвестен никому. Другой пример, более близкий к математике: поскольку все теоремы, скажем, школьного курса геометрии логически следуют из аксиом, то по нашему условию получилось бы, что тот, кто выучил все аксиомы, автоматически знает все теоремы. На самом деле, конечно, для этого требуется более длительное обучение, а всех возможных теорем не знает никто.

Эта трудность обычно называется *проблемой логического всезнания.* Она возникает в случаях, когда число возможных ситуаций настолько велико, что человек или даже компьютер оказывается неспособным их перебрать, или вообще бесконечно. В наших примерах это число невелико, и мы можем смело пользоваться вторым условием.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Казалось бы, ничего не меняется, и дети всегда будут говорить „нет“. Однако каждый раз ребенок получает знание о незнании других, и эта информация может помочь ему догадаться, чумазый ли он сам.

Чтобы лучше понять, что происходит, рассмотрим случай, когда детей всего трое, и два из них — второй и третий — чумазые, а первый чист. Кто чумазый, а кто чистый, знаем мы (и папа), но не сами дети. Поэтому нужно рассматривать все потенциально возможные ситуации, и мы будем для краткости обозначать чумазого ребенка цифрой 1, а чистого — цифрой 0: например, 010 означает, что первый и третий чисты, второй чумаз.

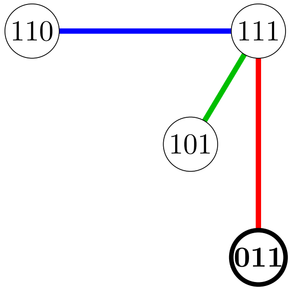
Возможные случаи удобно изобразить в виде куба:



Здесь две ситуации соединены красным отрезком, если они неотличимы с точки зрения первого ребенка (он не знает, чумаз ли он сам, поэтому не может отличить, например, 001 от 101); зеленые отрезки соответствует второму, синие — третьему ребенку. Одной вершины в этом кубе недостает: раз сказано, что чумазые есть, случай 000 невозможен.

Такие диаграммы, изображающие ситуации *(возможные миры)* в виде графа, где рёбра соединяют ситуации, неотличимые с точки зрения того или иного персонажа, называются *шкалами Крипке.*

Посмотрим теперь, что изменится после первого вопроса. В ситуациях, когда чумазый ребенок ровно один (например, 100), этот ребенок сразу понимает, что он чумазый. Значит, если все ответили „нет“, эти ситуации невозможны — и, что нам особенно важно, об этом теперь знают все дети! Получается следующая картинка:



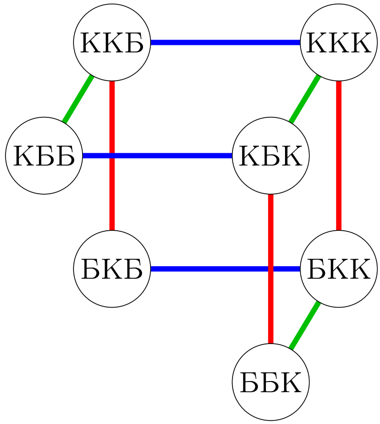
Теперь уже «крайними» оказались 110, 101 и 011. Когда папа второй раз задает тот же вопрос, в ситуации 011 второй и третий ребенок уже знают, что они чумазые.

Школьнику, справившемуся с задачей, можно задать здесь дополнительный вопрос: а сможет ли первый ребенок догадаться, что он чистый?

Если все дети были чумазыми (случай 111), то потребуется еще один вопрос: после первого вопроса отсекаются случаи 100, 010 и 001, после второго — 110, 101 и 011, и перед третьим вопросом все дети уже знают, что единственно возможная ситуация — 111.

Ясно, что так же можно рассуждать и когда детей больше трёх. Если чумазый ровно один, то он поймет это после первого вопроса (он знает, что чумазые есть, но не видит ни одного — значит, чумаз он сам). Если все ответили „нет“, то ситуации с одним чумазым отсекаются, значит, чумазых хотя бы двое. Если их действительно двое, это выявляется после второго вопроса. Иначе все узнают, что чумазых хотя бы трое, и так далее.

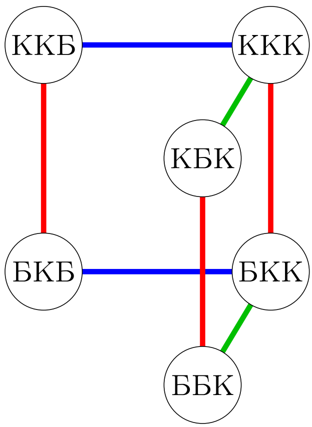
$\boxed{\mathbf{3}}$ Всего возможны 7 ситуаций: ККК, ККБ, КБК, БКК, ББК, БКБ, КББ. Ситуация БББ невозможна, потому что белых колпаков всего 2 (и мудрецы знают об этом). Каждый мудрец видит колпаки двух других, но не видит своего, поэтому ситуации, как и в предыдущей задаче, можно соединить цветными отрезками следующим образом:



(здесь красный цвет опять соответствует первому мудрецу, зелёный — второму, синий — третьему).

Эта картинка в точности повторяет картинку для задачи о чумазых детях! Это не случайно: действительно, белая шапка соответствует «чистому» мудрецу, красная — «чумазому». Условие, что белых шапок надето не больше двух — это в точности «чумазые есть». Различие в том, что мудрецы в этой задаче говорят не одновременно, а по очереди. Таким образом, шкала Крипке обновляется постепенно.

После того, как первый мудрец ответил „нет“, исчезает возможный мир КББ:

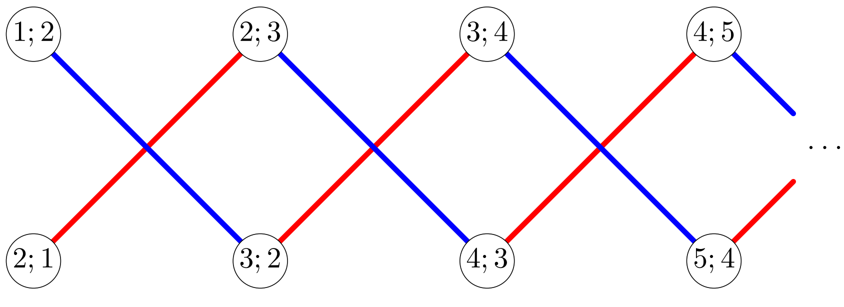


Словами рассуждение здесь выражается так: в ситуации КББ первый мудрец видит оба белых колпака и заключает, что у него на голове красный. В остальных ситуациях он такого заключения сделать не может. Поскольку первый мудрец сказал „нет“, имеет место любая ситуация, кроме КББ.

После ответа „нет“, данного вторым мудрецом, исчезают сразу два мира — БКБ и ККБ. Для первого из них рассуждение точно такое же: видя два белых колпака, мудрец знает, что его колпак красный. Отсечь также мир ККБ позволяет знание ответа первого мудреца. Действительно, видя один красный и один белый колпак, второй мудрец выбирает между двумя возможностями: ККБ и КББ. Однако он знает, что первый уже ответил „нет“, значит, вторая ситуация исключается, и второй мудрец заключает, что на нём надет красный колпак.

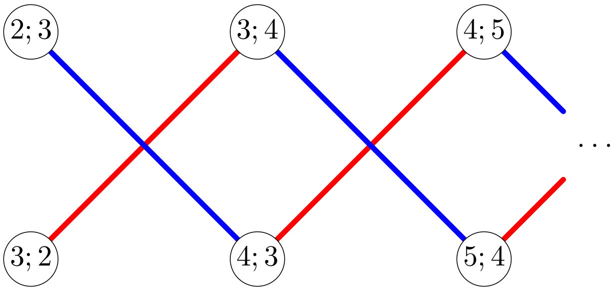
Теперь мы видим, что ответ третьего мудреца нам уже и не нужен: во всех оставшихся ситуациях — КБК, ККК, БКК, ББК — на нём красный колпак. Проведя вместе с нами такое же рассуждение, к этому ответу приходит и сам третий мудрец. Поэтому он и говорит „знаю“.

4 В этой задаче шкала Крипке выглядит следующим образом:



Здесь красный цвет соответствует первому математику, синий — второму; ситуации записываются в виде «$m; n$», где m — число, сообщённое первому математику, n — второму.

Видно, что в ситуации 2; 1 на вопрос первого математика второй ответит „да, известно“. Действительно, если второму сообщили 1, то у первого может быть только 2 (считается, что ноль не является натуральным числом). Из шкалы Крипке это видно чисто формально: поскольку возможный мир 2; 1 не связан ни с каким другим миром синей линией, второй математик точно знает оба числа. Следовательно, если второй математик ответил „нет“, мир 2; 1 отсекается. Аналогично, если на вопрос второго математика отвечает „нет“ первый, отсекается мир 1; 2. Итак, после двух ответов „нет“ остаётся следующая шкала Крипке:



Эта шкала отличается от исходной только увеличением всех чисел на 1. Теперь «крайними» оказываются миры 3; 2 и 2; 3: в них соответствующий математик скажет „да“. Если опять оба ответа „нет“, то эти два мира отсекаются, и движение вправо продолжается — до тех пор, пока «крайней» не окажется ситуация, которая на самом деле имеет место. Тогда мы и услышим ответ „да“.

Число вопросов определяется следующим образом. Если первому математику сообщили число n, а второму $n + 1$, то первый раз „да“ ответит первый математик на n-й вопрос второго математика. Если, наоборот, первому математику сообщили число $n+1$, а второму n, то первый раз „да“ ответит второй математик на n-й вопрос первого математика.

Заметим, что, в отличие от предыдущих задач, здесь модель Крипке бесконечна — значит, мы можем столкнуться с описанной выше проблемой всезнания. К счастью, информация, которую нужно помнить персонажам в каждый конкретный момент времени, всё-таки конечна: достаточно запоминать, какие миры к настоящему моменту уже отброшены.

$\boxed{\textbf{5}}$ В этом задаче ключ к решению таков: первый математик получил некоторую дополнительную информацию из слов „Старший похож на мать“. Эта фраза сообщает, что среди двух сыновей есть старший, иначе говоря — что они не одного возраста. Поскольку до того, как первый математик узнал это, ему не хватало информации для правильного ответа, у него должен был быть ещё один возможный вариант. Это происходит только в одном случае: когда произведение возрастов детей (а оно известно обоим математикам, т.к. они видят голубей, но неизвестно нам!) есть квадрат некоторого целого числа: например, 1, 4, 9, ... стоп: уже для 9 из двух возможных разложений на множители — $3 \cdot 3$ и $1 \cdot 9$ годится только первое, потому что 9-летний — это уже не дошкольник. Значит, остаётся 1 или 4. 1 тоже не подходит: тогда бы первый сразу знал ответ (обоим по 1 году), значит, голубей было $4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$.

В этом случае всё сходится. Пока первый математик не знал, что дети не одного возраста, у него было два варианта: либо им по 2 года, либо одному год, другому 4. Первый вариант отсекается сообщением о том, что один из сыновей — старший. Ответ: 1 и 4 года.

$\boxed{\textbf{6}}$ В этой задаче, в отличие от предыдущих, нарушено первое условие: участники могут говорить неправду. При этом, как обычно негласно предполагается в задачах «про рыцарей и лжецов», лжец говорит неправду всегда (таким образом, он не настолько коварен, чтобы иногда — когда ему выгодно — говорить правдиво). Кроме того, предполагается, что лжецы, если их несколько, не находятся в сговоре: каждый лжец не знает о других лжецах.

Первый мудрец, независимо от того, лжец он или правдивый, не может знать ответ на вопрос короля. Значит, он сказал правду, и поэтому не является лжецом. Таким образом, возможны три ситуации: ППЛ, ПЛП, ПЛЛ («П» означает говорящего правду, «Л» — лжеца; известно, что хотя бы один лжец есть). С точки зрения второго мудреца вторая и третья ситуации неразличимы между собой (и отличимы от первой). В первой ситуации он знает, кто лжец, и правдиво говорит „знаю“. Во второй и третьей второй мудрец не знает ответа, но при этом он лжец, и тоже говорит „знаю“. Таким образом, ответ второго мудреца не дает ни нам, ни третьему мудрецу никакой новой информации. Наконец, с точки зрения третьего мудреца неотличимы ситуации ППЛ и ПЛЛ, но его король просит назвать хотя бы одного лжеца, и он мог бы назвать себя. Значит, сказав „да, смогу“, он сказал правду, что противоречит тому, что он лжец. Значит, имеет место ситуация ПЛП: первый и третий мудрецы говорят правду, второй лжец.

Листок 11. Построения на клетчатой бумаге

На этом занятии для решения задач можно использовать только карандаш/ручку и бумагу в клеточку. Пользоваться линейкой, транспортиром и другими измерительными приборами нельзя.

Заглавными буквами $A, B, C, \ldots$ во всех задачах обозначены **узлы клетчатой бумаги.** Сторону одной клетки принимаем за 1.

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** На клетчатой бумаге проведён отрезок AB, не проходящий по сторонам клеток, и отмечена точка C. Постройте отрезок, равный AB, один конец которого в точке C, а другой конец в узле сетки. **б)** Постройте как можно больше таких отрезков. Сколько их получилось?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На клетчатой бумаге проведён отрезок AB, не проходящий по сторонам клеток. Постройте как можно больше треугольников ABC, для которых $AB = BC$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На клетчатой бумаге проведён отрезок AB, не проходящий по сторонам клеток, и отмечена точка C. Проведите через эту точку прямую, параллельную AB.

$\boxed{\mathbf{4}}$ На клетчатой бумаге проведён отрезок AB, не проходящий по сторонам клеток. Отметьте точку C так, чтобы угол ABC был прямым.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Незнайка нарисовал на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ с вершинами в узлах сетки, стороны которого не проходят по сторонам клеток, а потом всё стёр, оставив только точки A и B. Восстановите рисунок Незнайки. Сколько решений имеет задача?

$\boxed{\mathbf{6}}$ На клетчатой бумаге проведён отрезок AB, не проходящий по сторонам клеток. Постройте угол ABC, равный половине прямого угла.

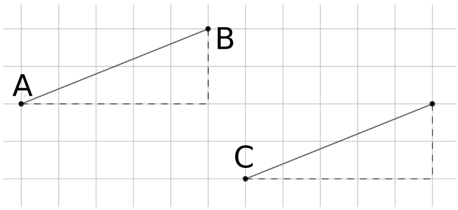
$\boxed{\mathbf{7}}$ Вершины треугольника лежат в узлах клеток. Как найти площадь треугольника, если это: **а)** прямоугольный треугольник, две стороны которого проходят по сторонам клеток; **б)** треугольник, одна сторона которого проходит по сторонам клеток; **в)** произвольный треугольник?

Ответы и комментарии

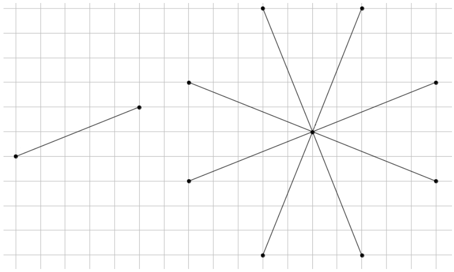
Главная цель этого занятия – знакомство школьников с базовыми понятиями геометрии (параллельность, перпендикулярность, равенство отрезков, площадь) до введения этих понятий в основном школьном курсе. Упор делается не на строгих доказательствах, а на максимальной наглядности, на тренировке геометрической интуиции. Материал для такой тренировки подобран максимально знакомый: клетчатая бумага, на которой много равных отрезков, параллельных и перпендикулярных прямых. На этом занятии мы не советуем требовать от школьников строгих доказательств того, что построен именно тот объект, который требуется (геометрия в школе ещё не началась либо дети только-только знакомятся с нею, а потому они не будут понимать, что от них хотят); кроме того, важно, чтобы каждый ребёнок усвоил метод «подсчёта клеточек» и «построения по клеточкам», а не строил «на глазок».

Если ребёнок сдаёт задачу так: «вот смотрите, я взял отрезок и построил всё, что нужно», то следует нарисовать ему любой другой отрезок и попросить прямо на месте решить задачу для него. Кроме того, если решение не единственно, то нужно добиваться, чтобы школьник увидел все возможные случаи.

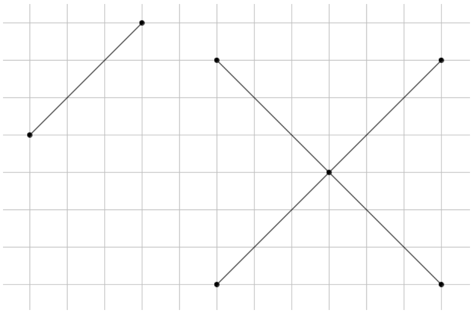
$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Построим прямоугольный треугольник по сторонам сетки, одна из сторон которого – AB. Затем перенесём этот треугольник в точку C. Та сторона этого треугольника, которая не идёт по сторонам сетки, будет равна отрезку AB. **б)** Вообще говоря, в пункте а) можно было бы не строить треугольник, а посмотреть, как мы получаем точку B. Для этого мы должны от точки A пройти на 5 клеток вправо и на 2 клетки в перпендикулярном направлении (эти числа для данного рисунка, для других отрезков количество клеток будет другим). Если пройти от точки C на 5 клеток в одном направлении и на 2 клетки в перпендикулярном изначальному направлении, то все отрезки, которые мы при этом получим, будут равны AB. Их может быть 8 («общий случай») или 4 штуки (если отрезок AB проходит под углом 45° к линиям сетки).



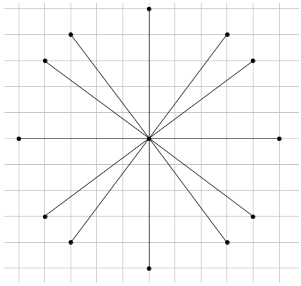
1а



1б: 8 отрезков



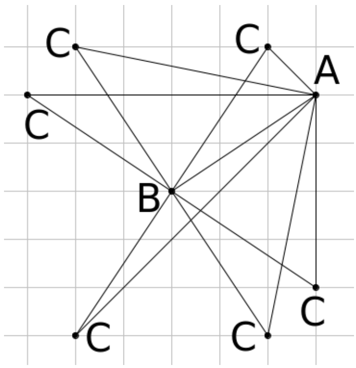
1б: 4 отрезка



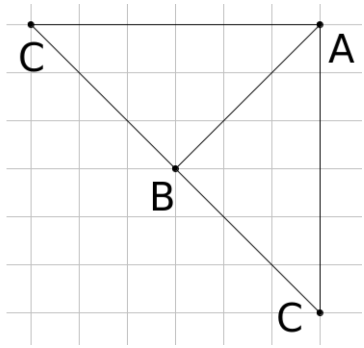
1б: 12 отрезков

Замечание. Если вспомнить теорему Пифагора, то окажется, что таких отрезков может быть больше восьми: двенадцать (так как, например, $4^2 + 3^2 = 5^2$, см. рисунок), шестнадцать (например, $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$), двадцать (например, $65^2 = 16^2 + 63^2 = 33^2 + 56^2$) и т.д. Конечно, школьникам, не знающим теорему Пифагора, говорить это не следует. Однако обратите внимание, как аккуратно сформулирована задача: вместо «нарисуйте все такие отрезки» сказано «нарисуйте как можно больше таких отрезков». Тем самым была соблюдена математическая строгость и условия, и решения.

2 Как нам уже известно, из одной точки выходит пучок из 8 или 4 равных отрезков. Соответственно, если один из отрезков выделить и его конец соединять с концами других отрезков, то будет получаться 7 или 3 треугольника. Однако один из таких треугольников нам не подходит – угол при его вершине будет равен 180°. Остаётся 6 или 2 треугольника.



2: 6 треугольников



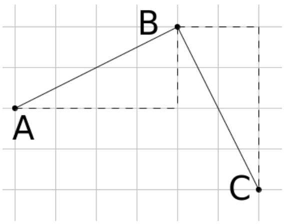
2: 2 треугольника

3 см. рисунок к задаче 1а.

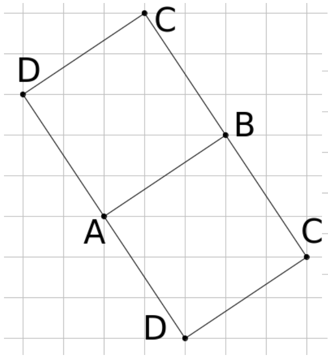
4 Как и в задаче 1а, строим прямоугольный треугольник, одной из сторон которого будет отрезок AB, а затем поворачиваем его на угол 90°. Если посмотреть на клеточки, то мы увидим, что точка B из точки A получается так: надо пройти 4 клеточки вправо и 2 клеточки вверх (опять же, это для данного рисунка!), а точка C получается из точки B так: надо пройти то же самое, но в направлении, перпендикулярном исходному, то есть 2 клеточки вправо и 4 клеточки вверх.

5 См. рисунок. Строим перпендикуляр 3 раза, каждый раз к новой стороне. Задача имеет 2 решения.

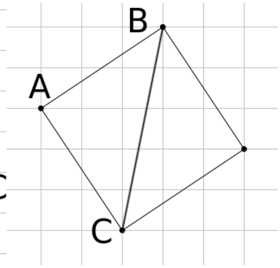
6 Строим квадрат со стороной AB и проводим в нём диагональ. Нетрудно видеть, что квадрат делится диагональю на два равных треугольника (если, например, сложить квадратную салфетку по диагонали, то половинки наложатся друг на друга, а прямой угол поделится пополам).



4.



5.

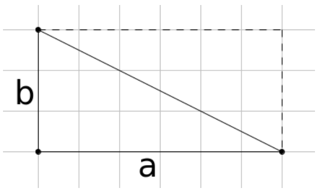


6.

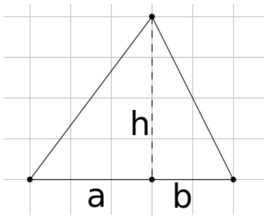
$\boxed{7}$ **а)** Достраиваем прямоугольный треугольник до прямоугольника, который поделится на два прямоугольных треугольника, равных исходному. Если a и b – стороны прямоугольника, то его площадь равна $a \cdot b$, а площадь данного прямоугольного треугольника равна $\dfrac{a \cdot b}{2}$.

б) Проводим высоту в треугольнике, падающую на сторону, проходящую по сторонам клеток (от школьников не нужно требовать знания слова «высота», достаточно правильной картинки и верных подсчётов). Площадь нашего треугольника будет представлена как сумма либо разность площадей двух прямоугольных треугольников. Проведём подсчёты для первого случая (сумма площадей): площадь треугольника равна $\dfrac{a \cdot h}{2} + \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{(a+b) \cdot h}{2}$, причём заметим, что $a + b$ – сторона нашего треугольника. Во втором случае (разность площадей) получаем аналогичный результат.

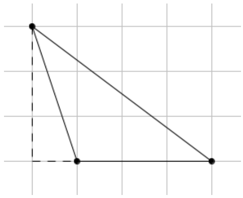
в) Опишем вокруг данного треугольника прямоугольник. Заметим, что площадь треугольника получается так: вычитаем из площади прямоугольника площади всех лишних кусочков, которые могут быть прямоугольными треугольниками (первый случай) или прямоугольными треугольниками и прямоугольниками (второй случай).



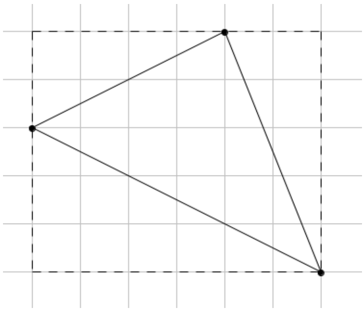
7а.



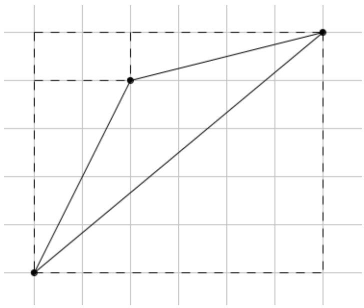
7б: первый случай



7б: второй случай



7в: первый случай



7в: второй случай

Листок 12. Шахматная раскраска

1 Два коня, белый и чёрный, играют друг с другом на шахматной доске. Выигрывает тот, кто съест противника. В начале игры белый конь стоит на поле a1, а чёрный — на поле b1. Первым ходит белый конь. Докажите, что чёрный конь не сможет выиграть, даже если белый будет ему поддаваться.

2 Из шахматной доски вырезали две угловые клетки на диагонали. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть доминошками из двух клеток?

3 На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но **а)** рубашкой вверх; **б)** рубашкой вниз и вверх ногами?

4 В каждой клетке доски 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

5 На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше девяти.

6 Пространственный лабиринт состоит из 27 кубических комнат, расположенных в виде куба $3 \times 3 \times 3$. Из любой комнаты можно перейти в любую соседнюю (через любую стену, пол или потолок). Исследователь лабиринта находится в центральной комнате. Он хочет обойти лабиринт, побывав в каждой комнате ровно по одному разу. Удастся ли ему это?

Ответы и комментарии

1 Поля a1 и b1 разного цвета. Ход коня меняет цвет поля. Значит, после того, как оба коня сделают ход (сначала белый, затем чёрный), они опять окажутся на клетках разного цвета. В частности, чёрный конь не сможет оказаться в клетке, где находится белый конь.

2 Каждая доминошка занимает одну чёрную и одну белую клетки. Поскольку мы вырезали две клетки одного цвета — скажем, белые — на оставшейся доске чёрных и белых клеток не поровну (чёрных 32, белых 30). Значит, разрезать нельзя.

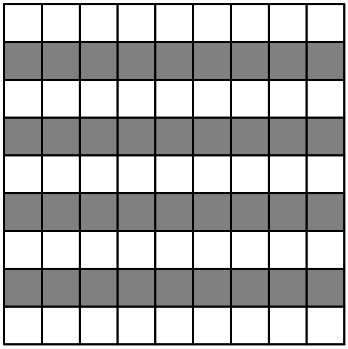
Школьники могут предлагать «решения» в духе „я попробовал разрезать, не получилось“. В таких случаях нужно убеждать, что несколько неудачных попыток не гарантируют, что решение в принципе невозможно.

3 **а)** Опять воспользуемся шахматной раскраской: мысленно разделим стол на прямоугольные «клетки», на которых может оказаться карта, и заметим, что на «белых» клетках (если исходная клетка считается белой) карта всегда лежит рубашкой вниз, а на «чёрных» — вверх. Значит, вернувшись на исходную клетку, карта опять ляжет рубашкой вниз.

б) Для второго вопроса используем другую раскраску: в чередующиеся горизонтальные полосы. Если исходная клетка лежит на белой полосе, то получится, что карта может лежать вверх ногами на чёрных полосах и только на них. Итак, если карта после нескольких перекладываний вернётся на своё изначальное место, то она окажется на нём в точности в том же положении, в котором была вначале.

4 Раскрасим доску 5×5 в шахматном порядке, пусть угловые клетки будут белыми. Тогда белых клеток 13, а чёрных — 12. Жук всегда переползает на клетку другого цвета, и жуков с чёрных клеток не хватит, чтобы заполнить белые.

5 Здесь шахматная раскраска не поможет (соседние по диагонали клетки одного цвета). Ракрасим доску в «тигровую» раскраску — горизонтальными полосами:



Если первая полоса белая, то белых клеток всего будет $5 \cdot 9 = 45$, а чёрных $4 \cdot 9 = 36$. Соседние по диагонали клетки принадлежат соседним полосам, т.е. окрашены в разный цвет. Муравьи с чёрных клеток могут занять не более 36 белых. Значит, хотя бы 9 белых клеток останутся пустыми.

В этой и предыдущей задачах, как обычно, нельзя принимать как верные «решения», основанные на рассмотрении конкретного переползания жуков.

$\boxed{\textbf{6}}$ Раскрасим лабиринт в шахматном порядке — так, чтобы комнаты, имеющие общую грань, были разного цвета. Если угловая комната белая, то белых комнат будет 14, а чёрных 13. На пути исследователя чёрные и белые комнаты чередуются; значит, чтобы обойти все комнаты ровно по одному разу, исследователь должен начать и закончить свой путь в белой комнате. Однако центральная комната чёрная. Значит, исследователю не удастся обойти лабиринт в соответствии с его желанием.

Листок 13. Ещё о клетчатых досках

$\boxed{\mathbf{1}}$ Играют в «Морской бой» на поле 10×10. Известно, что на нём как-то расположен один четырёхпалубный корабль. Какое наименьшее количество выстрелов необходимо произвести, чтобы наверняка его задеть?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно вырезать из квадрата 10×10? (Разрезы проводятся про сторонам клеток.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ На бесконечной клетчатой бумаге отметили 400 клеток. Докажите, что из них можно выбрать 100 клеток так, чтобы они не имели между собой общих точек.

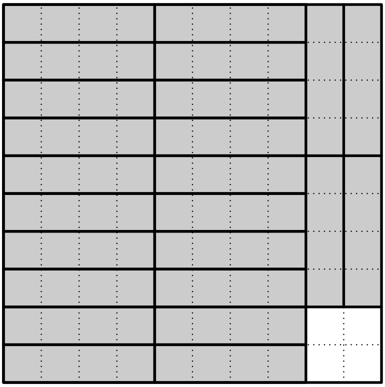
$\boxed{\mathbf{4}}$ На шахматной доске 8×8 двое сыграли в «Морской бой» не по правилам: один расставил 21 трёхпалубный корабль, а второй выстрелил один раз и не попал. Куда он мог выстрелить? (Укажите все возможные варианты.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что шахматную доску нельзя замостить пятнадцатью фигурками 1×4 и одним уголком из четырёх клеток.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? (Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.)

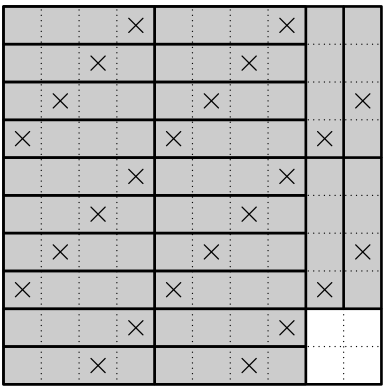
Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Разложим на поле как можно больше четырёхпалубников так, чтобы они не пересекались:



Здесь мы сумели закрыть почти всё поле, кроме маленького квадратика в правом нижнем углу, разместив 24 корабля. Ясно, что по каждому из них надо выстрелить хотя бы один раз — иначе наш противник может расположить свой корабль как раз там, где не было выстрелов. Таким образом, мы получили *оценку:* нужно как минимум 24 выстрела.

Пример приведён ниже (выстрелы отмечены крестиками):



Ни в одной строке и ни в одном столбце здесь нет четырёх подряд идущих клеток без крестика. Значит, расположить корабль так, чтобы его не задели, невозможно.

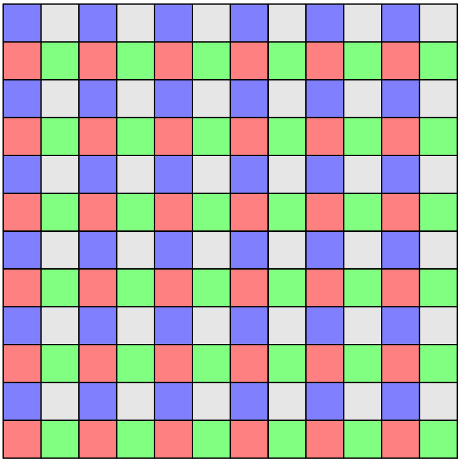
Заметим, что мы попали ровно один раз в каждый из размеченных нами кораблей. Квадратик 2×2 в углу остался без крестиков — этот факт даст ключ к следующей задаче.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Эта задача тесно связана с предыдущей. Из решения задачи 1 мы знаем, как разрезать квадрат 10×10 на 24 прямоугольника 1×4. Однако оставшиеся 4 клетки расположены неправильно: не в виде 1×4, а в виде 2×2. Может быть, можно резать как-нибудь по-другому, и тогда удастся получить ещё и 25-й прямоугольник 1×4?

Отрицательный ответ на этот вопрос даёт опять задача 1. Посмотрим на второй рисунок из её решения. Предположим, что мы сумели разрезать квадрат 10×10 на 25 прямоугольников 1×4. Тогда хотя бы один из них окажется свободным от крестиков (их всего 24). Значит, на это место можно положить четырёхпалубник, и он не будет задет выстрелами — а это невозможно. Значит, наибольшее число прямоугольников 1×4, которые можно вырезать из квадрата 10×10, равно 24.

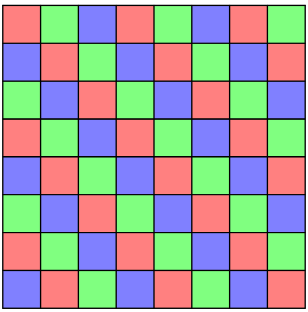
В этих двух задачах, как обычно в задачах такого рода, нужно требовать от школьников как пример, так и оценку (доказательство оптимальности).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Клетки можно раскрасить в четыре цвета так, что соседние — как по стороне, так и по диагонали — клетки окрашены в разные цвета:



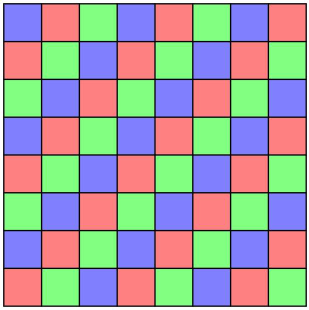
Среди 400 клеток найдутся хотя бы 100 одного цвета (иначе бы их общее количество было меньше $4 \cdot 100 = 400$). Это и будут искомые 100 клеток, любые две из которых не имеют ни общей стороны, ни даже общей вершины.

$\boxed{4}$ Раскрасим доску в 3 цвета следующим образом:

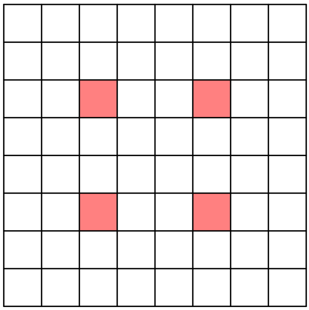


Любой прямоугольник 3×1, расположенный по линиям сетки, содержит ровно одну красную, одну зелёную и одну синюю клетку. Всего красных клеток 22, а зелёных и синих — по 21. Трёхпалубных кораблей тоже 21, значит, они закроют все синие и все зелёные клетки. Иначе говоря, клетка, в которую выстрелил второй игрок, непременно должна быть красной.

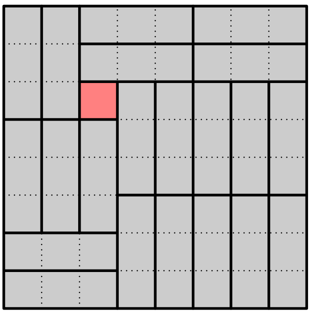
Более того, те же рассуждения верны и для симметричной раскраски:



Таким образом, искомая клетка должна быть красной в *обеих* раскрасках одновременно. Таких клеток всего четыре:



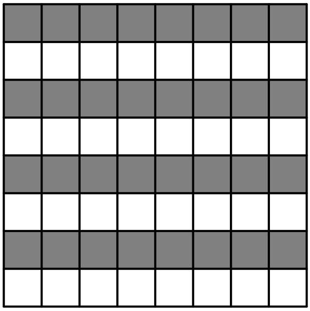
Для каждой из этих клеток действительно найдётся расположение трёхпалубников, не затрагивающее эту клетку:



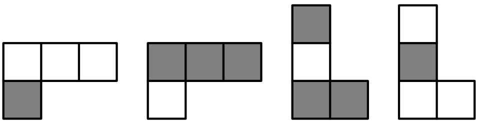
(расположения для трёх других клеток симметричны). Значит, эти 4 клетки и являются правильным ответом.

Эта задача довольно сложная, можно подсказать школьникам идею раскраски (чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 были клетки трёх цветов).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Здесь нам поможет «тигровая» раскраска доски 8×8:



Предположим, что нам удалось замостить доску 15 прямоугольниками 1×4 и одним четырёхклеточным уголком. Тогда в каждом прямоугольнике 1×4 число белых клеток чётно (0 либо 4, если прямоугольник расположен горизонтально, или 2, если вертикально). С другой стороны, как бы мы ни расположили уголок, в нём будет либо 1, либо 3 белые клетки — ниже приведены все возможные, с точностью до симметрий относительно горизонтальной и вертикальной осей, расположения этой фигурки:



Таким образом, общее число белых клеток оказывается нечётным, а на самом деле оно чётно (равно $64/2 = 32$). Полученное противоречие показывает, что требуемое замощение невозможно.

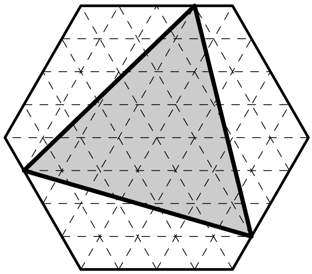
$\boxed{\mathbf{6}}$ Сначала сделаем оценку. Основное соображение здесь таково (его можно давать как подсказку школьникам): если цветов слишком много, то клеток какого-то цвета окажется мало — а именно, не больше, чем 64/(количество цветов). С другой стороны, ясно, что клеток каждого цвета должно быть хотя бы три (возьмём одну клетку и две с ней граничащие). Значит, общее число цветов не больше, чем $64/3 = 21\frac{1}{3}$, т.е. чем 21. Однако эта оценка недостаточно точная: не удаётся подобрать раскраску в 21 цвет, удовлетворяющую условию задачи.

Дело в том, что и трёх клеток одного цвета не хватит: если мы возьмём какую-то клетку и две другие, граничащие с ней по стороне, то между собой эти клетки граничить не могут. Значит, у каждой из них останется только один сосед своего цвета (первая клетка), что противоречит условию. Следовательно, каждого цвета нам понадобится хотя бы 4 клетки, а оценка на количество цветов уменьшится до $64/4 = 16$.

В 16 цветов с соблюдением условия доску раскрасить легко: разобьём её на 16 квадратов 2×2 и окрасим каждый из них в свой цвет.

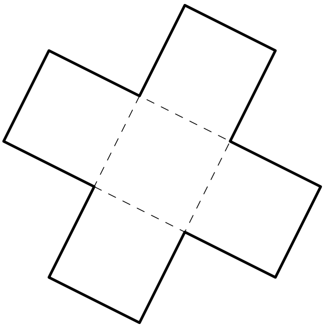
Листок 14. Треугольнички и квадратики

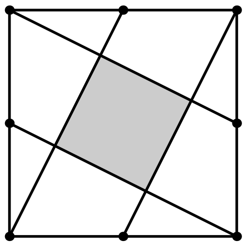
1 В правильный шестиугольник площади 96 вписан треугольник так, как показано на рисунке. Найдите площадь треугольника.



2 **а)** Разрежьте фигуру на рисунке слева на 5 частей (не обязательно по пунктирным линиям) и сложите из них квадрат.

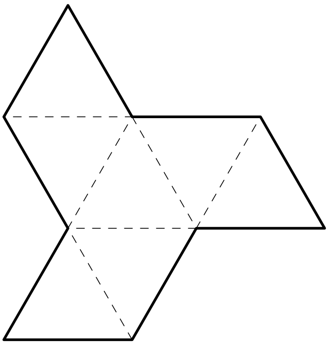
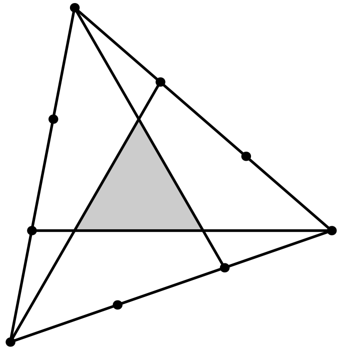
б) Середины сторон квадрата соединены с его вершинами так, как показано на рисунке справа. Найдите площадь заштрихованной части, если площадь исходного квадрата равна S.

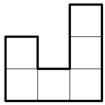




3 **а)** Разрежьте фигуру на рисунке слева на 4 части (не обязательно по пунктирным линиям) и сложите из них равносторонний треугольник.

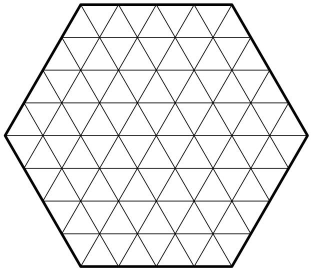
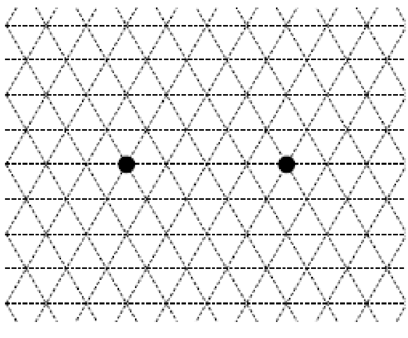
б) Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на три равные части, и некоторые из точек деления соединены с противоположными вершинами треугольника так, как показано на рисунке справа. Найдите площадь заштрихованной части, если площадь исходного треугольника равна S.

4 Можно ли сложить квадрат из фигурок  ?

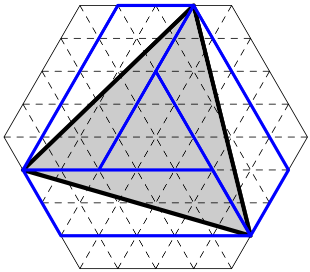
5 Закрасьте некоторые треугольные клетки на рисунке слева чёрным цветом так, чтобы у каждой белой (незакрашенной) клетки было ровно две чёрные соседки (по стороне), а у каждой чёрной клетки — ровно две белые соседки.

6 Коля и Макс живут в городе с треугольной сеткой дорог (см. рисунок справа). В этом городе передвигаются на велосипедах, при этом разрешается поворачивать только налево. Коля поехал в гости к Максу и по дороге сделал ровно 4 поворота налево. На следующий день Макс поехал к Коле и приехал к нему, совершив только один поворот налево. Оказалось, что длины их маршрутов одинаковы. Изобразите, каким образом они могли ехать (дома Коли и Макса отмечены).

Ответы и комментарии

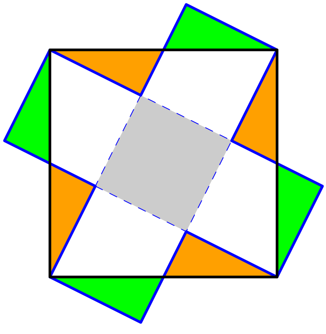
$\boxed{\mathbf{1}}$ Шестиугольник разбит сеткой ровно на 96 треугольничков: значит, площадь каждого треугольничка равна 1. Проведём следующее построение:



Видно, что треугольник, площадь которого надо вычислить, состоит из центрального синего треугольника (его площадь равна 9) и трёх половинок синих параллелограммов. Каждый синий параллелограмм имеет площадь 20 (он состоит из 5 рядов по 4 треугольных клетки в каждом). В искомый треугольник от каждого из трёх параллелограммов входит ровно половина. Значит, общая площадь равна $9 + \frac{3}{2} \cdot 20 = 39$.

Некоторые школьники пытаются подсчитать площадь приближённо, считая, что каждый треугольничек, лежащий на границе, следует считать как $^1/_2$. Такие «решения» засчитывать не следует.

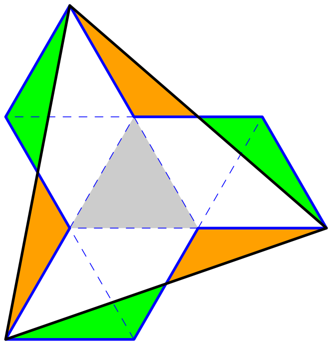
$\boxed{\mathbf{2}}$ Эта задача замечательна тем, что её пункты **а)** и **б)** решают друг друга — достаточно наложить картинки:



Зелёные и рыжие треугольники равны. Отрезав зелёные треугольники от креста и переложив их на место рыжих, получим квадрат. Частей будет ровно пять: четыре треугольника и центральная часть креста. Это даёт решение пункта **а)**.

Крест и квадрат имеют одинаковую площадь. Значит, площадь квадрата в 5 раз больше площади заштрихованного треугольника, и ответ в пункте **б)** — $\frac{1}{5}S$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Эта задача решается так же, как и предыдущая — наложением двух картинок:



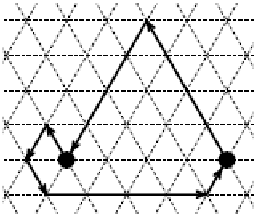
Пункт **а)** решается отрезанием зелёных треугольников и перемещением их на место рыжих. В пункте **б)** ответ $\frac{1}{7}S$, потому что большая фигура составлена из 7 маленьких треугольничков.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Можно: сначала соберём из двух таких фигурок прямоугольник 3×4, а потом из 12 таких прямоугольников соберём квадрат, сложив их в 4 ряда по 3.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Искомую закраску легко построить, если начать движение с внешней стороны шестиугольника внутрь: внешний ряд треугольничков окрашивается в шахматном порядке, затем следующий ряд — также в шахматном, чтобы треугольнички из разных рядов, примыкающие друг к другу, были одного цвета, и так далее к центру.

Если задача вызывает у школьников затруднения, предложите сначала потренироваться на шестиугольниках меньшего размера.

$\boxed{\mathbf{6}}$



Игра: математическая абака

Правила игры

В начале игры каждая команда получает табличку размера 5×5, в каждой клеточке которой написано условие задачи. В табличке имеются задачи по пяти различным темам, пяти различных уровней сложности, всего 25 задач. Задачи стоят от 10 до 50 баллов, в зависимости от сложности (самая лёгкая – 10 балл, самая трудная – 50 баллов). За закрытие горизонтали (решены все задачи одной темы) команда получает бонус 50 баллов (итого выходит 10+20+30+40+50+50=200 баллов), за закрытие вертикали (решены все задачи одного уровня сложности) – бонус, равный бонусу задачи в этой вертикали (например, если правильно решены все задачи за 30 баллов, то команда получает $30\cdot5+30 = 180$ баллов). Побеждает команда, набравшая наибольшее количество баллов. Каждую задачу можно сдавать только 1 раз, сдаётся преподавателю только ответ. Соответственно, если ответ правильный, жюри помечает задачу в табличке команды зелёной галочкой, если неправильное – то красным крестом, после чего (в случае правильного ответа) обновляет результат команды на доске.

Можно вводить различные модификации в эту игру, например, давать дополнительные баллы за закрытие диагоналей.

Условия задач

В приложении.

Ответы и комментарии

Для удобства будем писать номера задач с первой по пятую.

Комбинаторика.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 529;

$\boxed{\mathbf{2}}$ 20;

$\boxed{\mathbf{3}}$ 788;

$\boxed{\mathbf{4}}$ 360;

$\boxed{\mathbf{5}}$ 968.

Судоку: проверка по ответу.

Текстовые задачи.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3 пони, 12 гномов;

$\boxed{\mathbf{2}}$ 20 жёлтых и 15 белых одуванчиков;

$\boxed{\mathbf{3}}$ 127 гусей;

$\boxed{\mathbf{4}}$ 38 шаров;

$\boxed{\mathbf{5}}$ 6 ног.

Геометрия: проверка по картинке. В задаче 1 необходимо, чтобы дети нарисовали не только такой торт, но и подходящий разрез, а в ответе задачи 5 должно быть нарисовано, как фигура получается из трёх данных (то есть должны быть обозначены границы этих фигурок), а также отмечена ось симметрии.

Шахматные задачи.

$\boxed{\mathbf{1}}$ ни одной;

$\boxed{\mathbf{2}}$ проверка по картинке;

$\boxed{\mathbf{3}}$ проверка по картинке;

$\boxed{\mathbf{4}}$ 10 способов;

$\boxed{\mathbf{5}}$ 32 коня.

Диагностическое занятие

Диагностическое занятие в конце полугодия предлагается провести в виде математической игры «Лабиринт». Она подходит для этой цели, потому что является индивидуальным соревнованием.

Правила игры «Лабиринт»

В процессе игры «Лабиринт» каждый школьник обходит в определённом порядке несколько станций (аудиторий[1]), на каждой из которых решает случайно выбранную задачу по определённой теме. Решённые задачи фиксируются в его личном кондуите. Если школьник покидает станцию, не справившись с задачей, то он не может продолжать движение прежде, чем посетит специальную аудиторию «Реанимация», где решит простую задачу или головоломку. Побеждает тот, кто успеет пройти как можно больше кругов.

1-я станция: устный счёт

Решать задачи на этой станции нужно в уме!

$\boxed{\textbf{1}}$ У троих братьев оказалось вместе 18 карандашей. У младшего — на 2 карандаша меньше, а у старшего — на 2 карандаша больше, чем у среднего брата. Сколько карандашей у каждого из братьев?

$\boxed{\textbf{2}}$ Придумайте два числа, чтобы их сумма равнялась 12, а если каждое из этих чисел умножить само на себя и сложить полученные числа, то получится 80.

$\boxed{\textbf{3}}$ Коля задумал число. Сумма одной трети этого числа и одной четверти этого числа равна 21. Какое число задумал Коля?

$\boxed{\textbf{4}}$ По контракту работнику причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с него взыскивается 12 франков. Через 30 дней работник узнал, что ему ничего не причитается. Сколько дней он проработал из этих 30 дней?

$\boxed{\textbf{5}}$ Алёша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2.

[1] При недостатке места можно организовать по 2 станции в одном помещении.

Какое число задумал Алёша?

6 Сколько раз к наибольшему однозначному числу нужно прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трёхзначное число?

7 У одного мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

2-я станция: чётность, чередования, шахматная раскраска

1 Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки – пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

2 В таблице 3×3 одна угловая клетка закрашена чёрным цветом, все остальные клетки — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

3 20 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

4 Конь вышел с поля a1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

5 Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

6 Чётно или нечётно число $1 + 2 + 3 + ... + 1990$?

3-я станция: логика

1 Один из попугаев A, B и C всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий хитрец — иногда говорит правду, иногда врёт. На вопрос „Кто B?“ они ответили:

A: — Лжец.

B: — Я хитрец!

С: — Абсолютно честный попугай.

Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

2 Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

3 В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

4 Пять первоклассников стояли в шеренгу и держали 37 флажков. У всех справа от Таты — 14 флажков, справа от Яши — 32, справа от Веры — 20, справа от Максима — 8. Сколько флажков у Даши?

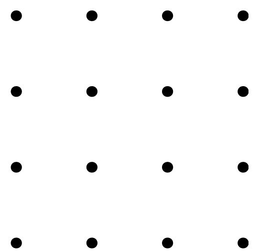
5 Однажды Миша, Витя и Коля заметили, что принесли в детский сад одинаковые игрушечные машинки. У Миши есть машинка с прицепом, есть маленькая машинка и есть зеленая машинка без прицепа. У Вити есть машинка без прицепа и маленькая зеленая с прицепом, а у Коли — большая машинка и маленькая синяя с прицепом. Машинку какого вида (по цвету, размеру и наличию прицепа) принесли мальчики в детский сад?

6 Для какого натурального числа x среди неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $3x > 25$, $x \geqslant 10$ и $x > 5$ три верны и два неверны?

7 На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: «А», «Б», «1», «2». Что написано на противоположных сторонах карточек, неизвестно. Какое наименьшее число карточек надо перевернуть, чтобы проверить истинность утверждения: «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой — гласная буква»?

4-я станция: геометрия

1 Проведите через эти 16 точек замкнутую ломаную из шести звеньев, не отрывая карандаша от бумаги.



$\boxed{2}$ Можно ли квадратный лист бумаги 3×3 сложить так, чтобы после одного прямолинейного разреза он распался на квадраты 1×1?

$\boxed{3}$ Разрежьте 2 разных квадрата на части, их которых можно сложить один квадрат.

$\boxed{4}$ Разрежьте какой-нибудь треугольник на три равных треугольника. (*Слова „какой-нибудь“ означают, что школьник сам вправе выбрать треугольник.)*

$\boxed{5}$ Сложите из 6 спичек 4 треугольника.

$\boxed{6}$ Разрежьте остроугольный треугольник на три трапеции. *(Треугольник рисует преподаватель!)*

$\boxed{7}$ Дана дощечка с тремя отверстиями: квадратным, круглым и треугольным. Придумайте выпуклую затычку такой формы, чтобы ей можно было заткнуть каждое из отверстий.

«Реанимация»

$\boxed{1}$ У овец и кур вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец?

$\boxed{2}$ У отца 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней он выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

$\boxed{\textbf{3}}$ Какие из приведённых слов имеют ось симметрии: ТОПОТ, СОН, СЕНО, ВЕС, ТОН, ЭХО, СОСНА, СОК?

$\boxed{\textbf{4}}$ Буратино сел в поезд. Проехав половину всего пути, он лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути Буратино проехал бодрствующим?

$\boxed{\textbf{5}}$ Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

$\boxed{\textbf{6}}$ Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова — за 3, а овца — за 6. За какое время они съедят копну все вместе?

$\boxed{\textbf{7}}$ Замените в записи $645{*}485{*}$ звёздочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 15.

Ответы и комментарии

Устный счёт

$\boxed{\mathbf{1}}$ Ответ: у младшего 4, у среднего 6, у старшего 8 карандашей.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Ответ: 4 и 8.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Ответ: Коля задумал число 36.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Ответ: 6 дней. Отдыхал он вчетверо больше, чем работал ($12 : 48 = 1 : 4$), значит, работал он $^1/_5$ всех дней.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Ответ: 10 (нужно совершить операции в обратном порядке).

$\boxed{\mathbf{6}}$ Ответ: 10 раз ($999 = 9 + 10 \cdot 99$).

$\boxed{\mathbf{7}}$ Ответ: 4 мальчика, 3 девочки.

Чётность, чередования, шахматная раскраска

$\boxed{\mathbf{1}}$ Чётность общего количества монет не меняется. Изначально число монет было нечётным, значит, оно не может стать чётным. (Кстати, знать, что такое *гривенник,* для решения этой задачи не нужно.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ Чётность числа чёрных клеток среди четырёх угловых не меняется при перекрашиваниях.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Ответ: нет, нельзя. Раскрасим поля, на которых стоят фишки, в чёрный и белый цвета через одно (в шахматном порядке). При наших операциях фишка не может поменять цвет поля, на котором стоит. С другой стороны, 1-я фишка должна попасть на 20-е поле, а оно другого цвета, чем 1-е.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Шахматный конь ходит с белой клетки на чёрную, а с чёрной – на белую.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Ответ: нельзя. Раскрасим клетки $1 \times 1 \times 1$ в шахматном порядке. В каждом кирпиче чёрных и белых клеток поровну, а в кубе $3 \times 3 \times 3$ без центральной клетки — нет.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Ответ: нечётно. В сумме нечётных слагаемых нечётное число (995 штук).

Логика

$\boxed{\mathbf{1}}$ Ответ: С хитрец, В лжец.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Ответ: философов больше (если x — число тех, кто и философ, и математик, то математиков будет $7x$, а философов — $9x$).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Ответ: в чашке — лимонад, в стакане — вода, в кувшине — молоко, в банке — квас.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Ответ: 8 флажков. Идея решения: чем больше флажков справа от первоклассника, тем левее он стоит в шеренге.

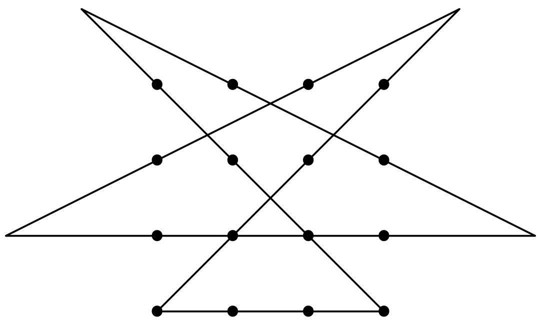
$\boxed{\mathbf{5}}$ Ответ: большую зелёную машинку без прицепа.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Ответ: $x = 9$.

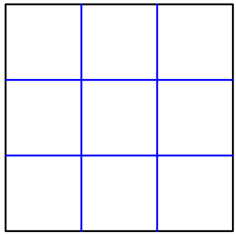
$\boxed{\mathbf{7}}$ Ответ: три (все, кроме первой). Первую карточку переворачивать не надо. Ведь если даже на ее обратной стороне написано нечётное число, а что-то другое (нечётное число, буква и т.д.), это не противоречит нашему утверждению! Вторую карточку надо переворачивать: если на ее обратной стороне написано чётное число, наше утверждение будет неверно. Третью карточку, очевидно, тоже нужно проверить (на обороте должна быть гласная буква, а не что-то другое). Нужно проверить и последнюю карточку: на ее обратной стороне не должно быть чётного числа.

Геометрия

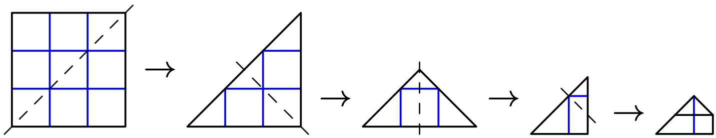
$\boxed{\mathbf{1}}$ Главная идея — выйти за пределы квадрата:



$\boxed{\mathbf{2}}$ Чтобы разрезать квадрат 3×3 на квадратики 1×1:

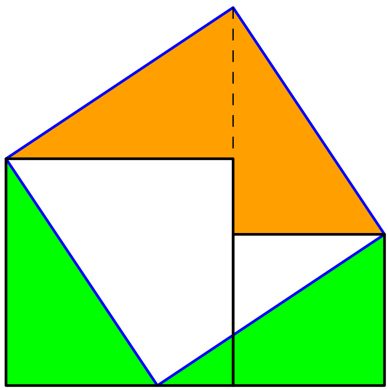


нужно сложить его так, чтобы все синие линии оказались одна над другой. Это делается напролом:



После этого один взмах ножниц по синей линии разрежет квадрат на маленькие квадратики.

$\boxed{\mathbf{3}}$



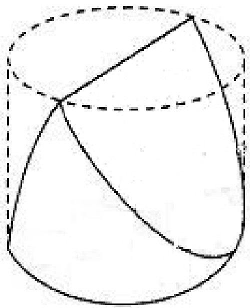
Отрежем два зелёных треугольника и переложим их на место рыжих. Из двух чёрных квадратов получится один синий.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Возьмём равносторонний треугольник и соединим его центр с вершинами.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Для этого нужно выйти в пространство и сложить спички в виде правильной треугольной пирамиды. У неё как раз 6 рёбер и 4 грани-треугольника.

$\boxed{6}$ Выберем внутри данного треугольника произвольную точку и проведём лучи, параллельные сторонам. Получится 3 трапеции.

$\boxed{7}$



«Реанимация»

$\boxed{1}$ Ответ: овец 14, кур 22.

$\boxed{2}$ Ответ: $C_5^2 = 10$ способами. (Школьники могут явно выписать все варианты.)

$\boxed{3}$ Ответ: ТОПОТ (вертикальная); СОН, СЕНО, ВЕС, ЭХО, СОК (горизонтальная).

$\boxed{4}$ Ответ: ${}^2/_3$ пути.

$\boxed{5}$ Да, может. Например: Андрей Юрьевич Иванов, Андрей Степанович Петров, Виктор Степанович Иванов, Виктор Юрьевич Петров.

$\boxed{6}$ За сутки лошадь съедает ${}^1/_2$ копны, корова — ${}^1/_3$, овца — ${}^1/_6$. В сумме они съедят 1 копну ($1 = {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_6$. Ответ: за 1 сутки.

$\boxed{7}$ Число должно делиться на 5 и на 3. Первое значит, что последняя звёздочка — это либо 0, либо 5. Второе — что сумма цифр делится на 3, что позволяет подобрать и первую звёздочку. Это и даёт все возможные ответы: 64514850, 64544850, 64574850, 64524855, 64554855, 64584858 (от школьников требуется предъявить хотя бы один правильный ответ).