Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

(5 класс)

Составители: Д. А. Коробицын, Г. К. Жуков

Москва, 2015

Математический кружок (5 класс). / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. Д. А. Коробицын, Г. К. Жуков. — М.: МГУ, 2015.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы.

Содержание

Листок 1. Плюс-минус один

$\boxed{\mathbf{1}}$ Зайцы нашли в лесу бревно длиной 6 м. Чтобы отнести домой, они распилили его на части длиной по 1 метру. Сколько они сделали распилов?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Из книги выпал кусок, у первой страницы которого номер 35, а у последней — 74. Сколько страниц выпало?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Теперь у зайцев уже несколько брёвен. Они распилили все брёвна, сделав 20 распилов, и получили 27 чурбачков. Сколько брёвен было у зайцев?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Сколько всего существует двузначных чисел? А трёхзначных?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Улитке надо подняться на столб высотой 10 м. Каждый день она поднимается на 4 м, а каждую ночь сползает на 3 м. Когда улитка доползёт до цели, если она стартовала в понедельник утром?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Главное здание МГУ состоит из нескольких секторов. Этажи в разных секторах отличаются по высоте. Из-за этого, например, получается, что переходы с 13 этажа сектора А ведут на 19 этаж секторов Б и В. Как соотносятся по высоте этажи в этих секторах?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Сколько раз за сутки на часах минутная стрелка обгонит часовую?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** 5 распилов.

Решение. После каждого распила количество частей увеличивается на 1. Вначале была одна часть (целое бревно), в конце стало 6. Значит, было сделано $6 - 1 = 5$ распилов.

$\boxed{2}$ **Ответ:** 40 страниц.

Решение. Посмотрим на страницы с 1-й по 74-ю. Из них в выпавший кусок не входят страницы с 1-й по 34-ю. Значит, выпало $74 - 34 = 40$ страниц.

$\boxed{3}$ **Ответ:** 7 брёвен.

Решение. После каждого распила количество чурбачков увеличивается на 1. Значит, после 20 распилов их количество увеличилось на 20. Тогда изначально у зайцев было $27 - 20 = 7$ брёвен.

$\boxed{4}$ **Ответ:** 90 двузначных и 900 трехзначных.

Решение. Двузначные числа — это $10, 11, 12, \ldots, 99$. Всего их $99 - 9 = 90$.

Аналогично трёхзначных чисел $999 - 99 = 900$.

$\boxed{5}$ **Ответ:** в воскресенье вечером.

Решение. За сутки (день и ночь) улитка будет продвигаться по столбу на 1 м (подниматься на 4 м днём и опускаться на 3 м ночью). После 6 суток она окажется на высоте 6 м и за следующий день доползёт до верха.

$\boxed{6}$ **Ответ:** $3 : 2$.

Решение. Уровень пола 13 этажа сектора А совпадает с уровнем пола 19 этажа секторов Б и В. Значит, высота первых 18 этажей сектора А равна высоте первых 12 этажей в Б и В. Тогда отношение равно $18 : 12$ или $3 : 2$.

$\boxed{7}$ **Ответ:** 21 раз.

Решение. За первые 12 часов минутная стрелка обгонит часовую 10 раз: каждый час, кроме первого и последнего. В 0 ч и 12 ч стрелки совместятся. Так как мы рассматриваем промежуток времени в 24 часа, то стрелки пойдут дальше. Их совпадение в 12 ч дня тоже нужно считать обгоном. За следующие 12 часов произойдёт ещё 10 обгонов, а всего их будет $10 + 1 + 10 = 21$.

Листок 2. Чётность

$\boxed{\mathbf{1}}$ Что такое чётное и что такое нечётное число? Каким является число 0: чётным или нечётным?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Можно ли разменять 25 лир десятью монетами в 1, 3 и 5 лир?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Существуют ли два натуральных числа, сумма и произведение которых нечётны?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Хулиган Дима порвал школьную стенгазету на 3 части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на 3 части. Потом опять один из кусков порвал на 3 части и т.д. Могло ли у него в итоге получиться 100 частей?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Обозначим буквой Ч чётные числа, а буквой Н — нечётные. Заполните пропуски так, чтобы получились верные соотношения:

$$\begin{array}{ll} \text{Ч} + \text{Ч} = \bigcirc & \qquad \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \bigcirc \\ \text{Ч} + \text{Н} = \bigcirc & \qquad \text{Ч} \cdot \text{Н} = \bigcirc \\ \text{Н} + \text{Ч} = \bigcirc & \qquad \text{Н} \cdot \text{Ч} = \bigcirc \\ \text{Н} + \text{Н} = \bigcirc & \qquad \text{Н} \cdot \text{Н} = \bigcirc \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ На шахматной доске на одной из клеток стоял конь. Он сделал несколько ходов и вернулся на ту же клетку. Чётное или нечётное число ходов он сделал?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «−» так, чтобы получился 0?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании, связанном с принятием важного решения, присутствовали все представители обеих палат. Из-за важности вопроса при голосовании никто не воздержался. После подведения итогов было объявлено, что решение принято большинством в 25 голосов. Оппозиция закричала: «Это обман!» Как это удалось определить?

$\boxed{\mathbf{9}}$ На этот раз хулиган Дима исправил две цифры в примере на умножение. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Помогите учительнице Марье Петровне восстановить исходный пример. (Определите, какие цифры на что были исправлены, и объясните, почему по-другому это сделать было нельзя.)

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Решение.** *Чётным* называется число, которое делится на 2 (нацело), *нечётным* — число, которое не делится на 2.

0 — это чётное число, потому что 0 делится на 2.

$\boxed{2}$ **Ответ:** нет, нельзя.

Решение. Сумма чётного количества (в данном случае 10) нечётных слагаемых будет чётным число. А 25 — нечётное число.

$\boxed{3}$ **Ответ:** нет, не существуют.

Решение. Если бы такие числа существовали, то для того, чтобы их произведение было нечётным, нужно, чтобы они оба были нечётными. Но тогда их сумма будет чётной. Противоречие.

$\boxed{4}$ **Ответ:** нет, не могло.

Решение. Если любой кусок стенгазеты разорвать на 3 части, то общее число кусков увеличится на 2. Значит, общее количество частей всегда будет нечётным. Но 100 — чётное число.

$\boxed{5}$ **Ответ:**

$$\begin{array}{lll} \text{Ч} + \text{Ч} = \textbf{Ч} & \qquad & \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \textbf{Ч} \\ \text{Ч} + \text{Н} = \textbf{Н} & & \text{Ч} \cdot \text{Н} = \textbf{Ч} \\ \text{Н} + \text{Ч} = \textbf{Н} & & \text{Н} \cdot \text{Ч} = \textbf{Ч} \\ \text{Н} + \text{Н} = \textbf{Ч} & & \text{Н} \cdot \text{Н} = \textbf{Н} \end{array}$$

$\boxed{6}$ **Ответ:** чётное.

Решение. После каждого хода коня меняется цвет клетки, на которой он стоит (с чёрной клетки он переходит на белую, с белой — на чёрную). В итоге конь вернулся на клетку того же клетку, что и был изначально. Значит, он сделал чётное число ходов.

$\boxed{7}$ **Ответ:** нельзя.

Решение. Среди чисел от 1 до 10 нечётное количество нечётных.

$\boxed{8}$ **Решение.** Посмотрим на общее количество депутатов в обеих палатах. Оно чётно, так как весь парламент состоит из двух одинаковых по численности палат.

Обозначим количество депутатов, голосовавших против, за x. Тогда тех, кто голосовал за, было $x + 25$. Общее число депутатов тогда должно быть равно $2x+25$ — нечётному числу. Но мы знаем, что оно чётно. Значит, голоса были посчитаны неправильно.

$\boxed{9}$ **Ответ:** $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$.

Решение. Наличие любого из трёх множителей 4 в левой части равенства приводит к тому, что в правой части должно стоять чётное число, которое оканчиваться на нечётную цифру 7 не может. Так как все три этих множителя мы изменить не можем, значит, чтобы получить изначальное равенство, точно нужно поменять цифру 7.

Кроме этого, остаётся поменять ещё только одну цифру. В левой части равенства есть два множителя 5. Наличие любого из них означает, что число в правой части оканчивается на 5 или на 0. Так как хотя бы одна из этих пятёрок точно была изначально, то получается, что на месте 7 было 5 или 0. Слева точно были четвёрки (так как их целых три), поэтому последняя цифра правого числа точно была чётной, т.е. 0.

Осталось определить ещё одну изменённую цифру. Если ничего не менять слева, то справа должно быть $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$. Но 1600 из 2240 заменой одной цифры не получается. Значит, второе изменение точно было слева, а справа было 2240.

2240 содержит только один простой множитель 5. Значит, одну из пятёрок слева нужно заменить на другую цифру так, чтобы произведение было равно 2240. Эта цифра $2240 : 4 : 4 : 4 : 5 = 7$. Т.е. одну из пятёрок надо заменить на 7.

Листок 3. Логические задачи

$\boxed{\mathbf{1}}$ В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку «клубничное»?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Прав ли он?

$\boxed{\mathbf{3}}$ У императора украли перец. Как известно, те, кто крадут перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или фамилия, или отчество. Может ли такое быть?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 24 цента и 2 бифштекса. Бармен сказал, что с него 20 долларов 5 центов. Ковбой Джо высказал бармену всё, что он думает о его умении считать. Действительно ли бармен ошибся?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Кто-то подарил Златовласке подарок, положив его на крыльцо её дома. Златовласка подозревает, что это был один из её друзей: Стрекоза, Огонёк или Ушастик. Но как это узнать? Каждый из них указывает на одного из двух других. Правду сказала только Стрекоза. Если бы каждый указывал не на того, на кого указывает, а на второго, то Ушастик был бы единственным, кто сказал правду. Кто же подарил подарок?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Кто-то из трёх друзей таким же образом подарил подарок Синеглазке. На вопросы Синеглазки Огонёк отвечал, что это Ушастик, а что сказали Ушастик и Стрекоза, Синеглазка забыла. Златовласка взяла дело в свои руки и выяснила, что только один из троих сказал правду, и именно он и сделал подарок. Кто подарил подарок?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зелёной рубашках. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** малиновое.

Решение. Так как все надписи неправильные, то в третьей банке не может быть ни малиновое, ни клубничное варенье. Значит, там смородиновое варенье. Тогда клубничное и малиновое должны быть в первых двух банках. А так как надписи неправильные, то в банке «клубничное» на самом деле малиновое варенье.

$\boxed{2}$ **Ответ:** нет, он неправ.

Решение. Первым утверждением он говорит, что если человек великий, то у него плохой почерк. Но из этого совершенно не следует, что *обратное* утверждение тоже верно: то есть, что человек с плохим почерком великий. Таким образом, его вывод неверен.

Можно привести много верных математических утверждений, обратные к которым неверны. Например: если два числа чётны, то их сумма тоже чётна. Но совсем не обязательно, что если сумма двух чисел чётна, то оба они тоже чётны $(3 + 5 = 8)$.

$\boxed{3}$ **Ответ:** нет.

Решение. Предположим, что он виновен. Значит, он должен всегда лгать. Кроме того, так как это он украл перец, то он должен знать, кто его украл — это он сам. Но тогда получается, что он сказал правду. Противоречие.

Значит, наше предположение неверно, и виновным он быть не может.

$\boxed{4}$ **Ответ:** может.

Решение. Например:

Иванов Александр Сергеевич
Иванов Павел Васильевич
Гусев Александр Васильевич
Гусев Павел Сергеевич

$\boxed{5}$ **Ответ:** действительно.

Решение. Выразим цены всех товаров в центах. Так как 40 — чётное число, то несколько бутылок Кока-Колы, купленные Джо, стоят чётное число центов. Аналогично сэндвичи стоят чётное число центов. Так как бифштекса два, то оба они вместе также стоят чётное число центов. Получается, что каждый товар стоит чётное число центов, поэтому стоимость всего заказа должна тоже выражаться чётным количеством центов. Но 20 долларов 5 центов= 2005 центов — нечётное число. Значит, бармен ошибся.

$\boxed{6}$ **Ответ:** Огонёк.

Решение. Это не могла быть Стрекоза, так как если бы это она подарила подарок, то указала бы на себя, так как она сказала правду. Из таких же соображений следует, что это не мог быть Ушастик. Значит, это был Огонёк.

$\boxed{7}$ **Ответ:** Стрекоза.

Решение. Так как тот, кто подарил подарок, сказал правду, то он должен был указать на себя. Поэтому подарок подарил не Огонёк (он указал на Ушастика). Кроме того, отсюда следует, что он сказал неправду. Значит, подарок подарил не Ушастик. Получается, что это была Стрекоза.

$\boxed{8}$ **Ответ:** у Бома зелёная рубашка и синие туфли. У Бима красная рубашка и красные туфли.

Решение. Составим таблицу:

	Бам	**Бим**	**Бом**
рубашка	не зел.	*одинак.*	не кр.
туфли	**зел.**	*одинак.*	не кр.

У Бама зелёные туфли, поэтому двум другим клоунам остаются синие и красные. У Бама не красные. Значит, у него синие, а красные у Бима. Тогда рубашка у Бима тоже красная.

	Бам	**Бим**	**Бом**
рубашка	не зел.	**кр.**	не кр.
туфли	**зел.**	**кр.**	**син.**

Баму и Бому остаются зелёная и синяя рубашки. У Бама не зелёная. Значит, у него синяя, а зелёная у Бома.

	Бам	**Бим**	**Бом**
рубашка	**син.**	**кр.**	**зел.**
туфли	**зел.**	**кр.**	**син.**

Листок 4. Затруднительные ситуации

1 В двух кошельках всего лежит два рубля. При этом в одном кошельке денег в два раза больше, чем в другом. Как такое может быть?

2 Замок окружён рвом, имеющим форму прямоугольной рамки. Ширина рва всюду одинакова. Есть две доски, длины которых равны ширине рва. Можно ли переправиться через ров?

3 Можно ли погрузить на три грузовика семь бочек с квасом, семь пустых бочек и семь бочек, заполненных наполовину, чтобы на каждом грузовике было по семь бочек и поровну кваса?

4 Два поезда движутся навстречу друг другу по одной железнодорожной ветке. От неё отходит тупик, длина которого меньше длины поезда, но больше длины одного вагона. Как поездам разминуться?

5 Три котёнка и три щенка съели двадцать сосисок. Рыжий котёнок съел больше всех, а серый — не меньше всех. Может ли так быть, что щенки съели не меньше сосисок, чем котята?

6 Можно ли пять бумажных колец склеить так, чтобы при разрезании только одного звена получалось пять отдельных звеньев?

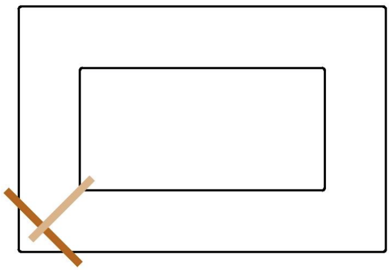
7 В баке не менее десяти литров воды. Можно ли набрать шесть литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

8 Крестьянину нужно переправить через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или только волк, или только коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой без крестьянина, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как быть?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Решение.** В каждом из кошельков лежит по монете 1 руб., и один из кошельков лежит внутри другого.

$\boxed{2}$ **Решение.** Первую доску нужно положить «на угол» внешнего прямоугольника, а вторую так, чтобы её первый конец лежал на первой доске, а второй на углу внутреннего прямоугольника.



$\boxed{3}$ **Ответ:** можно.

Решение. Приведём пример. Пусть 1 — полная бочка, $\frac{1}{2}$ — бочка, заполненная наполовину, 0 — пустая.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\textbf{I:} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\textbf{II:} & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\textbf{III:} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{array}
$$

$\boxed{4}$ **Решение.** Перегоним поезда так, чтобы оба они оказались слева от тупика. От крайнего (правого) поезда отцепим последний вагон и загоним его в тупик. Потом перегоним поезда так, чтобы они оба оказались справа от тупика. Вагон из тупика вытащим и прицепим в конец левого поезда. Проделаем эту операцию несколько раз. В итоге весь поезд, который был раньше справа, окажется полностью слева от другого поезда (который был слева). Расцепим поезда, и они смогут ехать дальше.

$\boxed{5}$ **Ответ:** может.

Решение. Пусть первый котёнок будет рыжим, а второй — серым.

Котята: 5, 2, 1;

Щенки: 4, 4, 4.

$\boxed{6}$ **Ответ:** можно.

Решение. К одному из колец прицепляем четыре остальных кольца. При его разрезании получится пять отдельных частей.

$\boxed{7}$ **Ответ:** можно.

Решение.

бак	**ведро (9 л)**	**бидон (5 л)**
≥ 10	0	0
≥ 5	0	5
≥ 5	5	0
≥ 0	5	5
≥ 0	9	1
≥ 9	0	1
≥ 9	1	0
≥ 4	1	5
≥ 4	**6**	0

$\boxed{8}$ **Решение.**

Крестьянин, Капуста, Коза, Волк		
Капуста, Волк		**Крестьянин, Коза**
Крестьянин, Капуста, Волк		Коза
Волк		**Крестьянин, Капуста**, Коза
Крестьянин, Коза, Волк		Капуста
Коза		**Крестьянин**, Капуста, **Волк**
Крестьянин, Коза		Капуста, Волк
		Крестьянин, Капуста, **Коза**, Волк

Листок 5. Обратный ход

$\boxed{1}$ **а)** Ваня задумал число, умножил его на 2, прибавил 3 и получил 17. Какое число задумал Ваня?

б) На этот раз Гоша задумал число. Потом прибавил к нему 5, разделил на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумано?

$\boxed{2}$ Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через четыре двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

$\boxed{3}$ В парке посадили в ряд аллею деревьев. Через год между любыми двумя соседними деревьями посадили ещё по одному. Ещё через год проделали то же самое. Стало 1197 деревьев. Сколько их было изначально?

$\boxed{4}$ Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму, потом второй проиграл первому половину своих монет, затем опять первый проиграл половину монет. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго 33. Сколько монет было у каждого из пиратов перед началом игры?

$\boxed{5}$ На озере расцвела одна лилия. Каждый день количество цветов на озере удваивалось, и на 20-й день все озеро покрылось цветами. На какой день озеро покрылось цветами наполовину?

$\boxed{6}$ С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить нуль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить 74?

$\boxed{7}$ Все натуральные числа от 1 до 1000 записали в следующем порядке: сначала были выписаны в порядке возрастания числа, сумма цифр которых равна 1, затем, также в порядке возрастания, числа с суммой цифр 2, потом — числа, сумма цифр которых равна 3 и т.д. На каком месте оказалось число 996?

$\boxed{\mathbf{8}}$ На Малом Мехмате в комнату 12-04 всем заходившим туда детям давали шоколадки. Первому зашедшему дали одну шоколадку и десятую часть всех оставшихся, второму зашедшему дали две шоколадки и десятую часть оставшихся, ..., девятому зашедшему дали девять шоколадок и десятую часть оставшихся. После этого прибежал Гоша, но, к сожалению, шоколадки уже закончились. Сколько шоколадок получили дети?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ: а)** 7; **б)** 10.

Решение. а) Так как после прибавления 3 получилось 17, значит, до этого было $17 - 3 = 14$. Число 14 получилось после умножения на 2, значит, до этого было $14 : 2 = 7$.

б) Аналогично проделаем все действия в обратном порядке:

$2 \cdot 7 = 14$

$14 + 6 = 20$

$20 : 4 = 5$

$5 \cdot 3 = 15$

$15 - 5 = 10$.

Таким образом, задумано было число 10.

$\boxed{2}$ **Ответ:** 150.

Решение. После прохождения каждой двери количество яблок уменьшалось в 2 раза. Так как дверей было четыре, то яблок сначала было $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$.

Тогда стражники забрали $160 - 10 = 150$ яблок.

$\boxed{3}$ **Ответ:** 300.

Решение. Если в ряд растут несколько деревьев, то мест между ними для посадки новых на 1 меньше, чем деревьев в ряду. Пусть перед тем, как деревья сажали третий раз, их уже было x. Значит, добавилось ещё $x - 1$ дерево. Так как их стало 1197, то $x + x - 1 = 1197$. Тогда $2x - 1 = 1197$, $2x = 1198$, $x = 599$. То есть, за год до того, как деревьев стало 1197, их было 599.

Дальше будем рассуждать аналогично. Пусть сначала (то есть за год до того, как деревьев стало 599) их было y. Получаем, что $2y - 1 = 599$. Тогда $y = 300$. Значит, изначально деревьев было 300.

$\boxed{4}$ **Ответ:** по 24 монеты.

Решение. В конце игры у первого пирата стало 15 монет. До этого он проиграл половину своих монет второму, значит, перед последней партией у него было $15 \cdot 2 = 30$ монет, тогда у второго было $33 - 15 = 18$ монет. Перед тем, как у пиратов стало соответственно 30 и 18 монет, второй проиграл половину своих первому. Значит, ещё раньше (после первой партии) у второго пирата было $18 \cdot 2 = 36$

монет, а у первого $30 - 18 = 12$. Перед этим прошла самая первая партия, после которой первый отдал половину своих монет второму. Значит, в самом начале у первого пирата было $12 \cdot 2 = 24$ монеты, а у второго $36 - 12 = 24$.

$\boxed{5}$ **Ответ:** на 19-й день.

Решение. Каждый день количество лилий удваивалось. Значит, перед последним 20-м днём лилий было в два раза меньше, чем после него. Т.е. они покрывали половину озера.

$\boxed{6}$ **Ответ:** нельзя.

Решение.

$$74 \leftarrow 37 \leftarrow 73, \qquad 74 \leftarrow 47$$

Число 74 можно получить из числа 37 (умножением на 2) или из числа 47 (перестановкой цифр). Числа 37 и 47 нечётные, поэтому умножением на 2 их получить нельзя. Перестановкой цифр 37 можно получить из числа 73, а 47 из 74 (начальное число). 73 — нечётное число, поэтому его также можно получить только перестановкой цифр из числа 37 (тоже уже встречалось). Получается, что 74 применением указанных операций можно получить только из чисел 37, 47 и 73. Таким образом, из 1 нельзя получить 74.

$\boxed{7}$ **Ответ:** на 990-м месте.

Решение. Сумма цифр числа 996 равна 24. Причём 996 — самое большое из выписанных с такой суммой цифр (так как в первых двух разрядах стоят максимально большие цифры). Значит, перед числом 996 выписаны только числа с суммой цифр 25, 26, 27. (Никакое из выписанных чисел не может иметь сумму цифр, большую 27, так как число 999 имеет максимально возможную сумму цифр из всех трёхзначных, а значит, также и из всех двузначных, и однозначных чисел, а единственное выписанное четырёхзначное число 1000 имеет сумму цифр, равную 1.) Сумму цифр 27 имеет только число 999; сумму цифр 26 — числа 998, 989 и 899; сумму цифр 25 — числа 997, 979, 799, 988, 898, 889. Таким образом, перед числом 996 написано 10 чисел, значит, оно оказалось на 990-м месте.

$\boxed{8}$ **Ответ:** 81 шоколадку.

Решение. Когда пришёл Гоша, то шоколадок уже не осталось, то есть, можно сказать, что их осталось 0 штук. Перед этим в комнату заходил ребёнок (девятый по счёту), которому дали сначала 9 шоколадок, а потом десятую часть оставшихся. Если отдать десятую часть шоколадок, то ещё останется девять десятых. Но девять десятых от количества оставшихся шоколадок оказалось равным 0, значит, и одна десятая тоже равна 0. Таким образом, ребёнок №9 (будем называть его так) получил $9 + 0 = 9$ шоколадок. До девятого школьника заходил ребёнок №8. Он получил 8 шоколадок и десятую часть оставшихся. После того, как он ушёл, осталось 9 шоколадок — «девять десятых оставшихся». Значит, «десятая часть оставшихся» равна 1, а всего ребёнок, пришедший восьмым, получил $8 + 1 = 9$ шоколадок. Таким образом, перед его приходом было 18 шоколадок. Аналогично можно получить, что перед приходом ребёнка №7 было 27 шоколадок, перед приходом ребёнка №6 — 36 шоколадок, №5 — 45 шоколадок, №4 — 54 шоколадки, №3 — 63 шоколадки, №2 — 72 шоколадки и перед приходом первого ребёнка была 81 шоколадка. Таким образом, дети получили 81 шоколадку.

Листок 6. Про деньги

1 В копилке лежит 20 рублёвых монет и 20 двухрублёвых монет. Какое наименьшее число монет нужно достать из копилки, чтобы среди них наверняка оказались **а)** две одинаковые монеты; **б)** две двухрублёвые монеты; **в)** две разные монеты?

2 Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

3 Есть девять монет, среди них одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая весит немного меньше. Как с помощью чашечных весов без стрелок и гирь за два взвешивания гарантированно определить фальшивую монету?

4 Пиноккио посадил денежное дерево, и вместо листьев на нём появлялись каждый день золотые монеты. В первый день на дереве появилась одна монета, во второй день — две, в третий день — три, и так каждый день на нём вырастало монет на одну больше, чем в предыдущий. В ночь с 29-го на 30-й день пришли лиса Алиса и кот Базилио и оборвали все золотые монеты. Сколько монет досталось коварным Алисе и Базилио?

5 Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль «Запорожец» и 2600\$. Но по истечении 8 месяцев уволился и при расчёте получил «Запорожец» и 1000\$. Сколько стоил «Запорожец»?

6 Двое играют в такую игру. Они по очереди выкладывают на круглый стол одинаковые монеты. Класть монеты друг на друга нельзя. Проигрывает тот, кому некуда положить очередную монету. Кто из игроков может гарантированно обеспечить себе победу — начинающий или его соперник? Как он должен играть?

7 На столе лежат монеты. 15 из них — орлом вверх, остальные — орлом вниз. Требуется с завязанными глазами разложить эти монеты на две кучи так, чтобы в этих кучах число монет, лежащих орлом вверх, было одинаково. Количество монет в кучах может быть разным (куча может состоять из любого количества монет, в том числе из одной или еще меньше), монеты можно переворачивать, но определить наощупь, как лежит монета, невозможно.

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ: а)** 3; **б)** 22; **в)** 21.

Решение. а) Среди трёх монет всегда найдутся две одного достоинства, так как в копилке есть только два вида монет. С другой стороны, двух монет хватит не всегда, так как может попасться по одной монете каждого вида.

б) Среди 22 монет не может оказаться более 20 рублёвых, поэтому всегда найдутся как минимум две двухрублёвые. Если вытаскивать меньше 22 монет, то гарантировать выполнение указанного условия нельзя. Возможен случай, когда будут попадаться рублёвые монеты до тех пор, пока они не закончатся в копилке. Тогда двухрублёвых монет будет не больше одной (1 для случая, когда вытаскиваем всего 21 монету и 0 для случая, когда вытаскиваем меньше).

в) Если вытащить 21 монету, то все они не могут быть одинаковыми, так как монет каждого вида только 20. Поэтому среди них найдутся две разные. Если вытащить меньше 20 монет, то все они могут быть одинаковыми, поэтому двух монет разного достоинства среди них может и не оказаться.

$\boxed{2}$ **Ответ:** хозяйки потратили денег поровну, но вторая купила больше молока.

Решение. Так как первая хозяйка покупала ежедневно одинаковое количество молока, то средняя цена купленного ею литра молока равна средней цене молока за месяц. Поскольку ежедневно она покупала 1 литр, то в среднем она тратила 20 рублей в день — так же, как и вторая хозяйка, следовательно, они потратили одинаковое количество денег. В те дни, когда молоко дешевое (стоит меньше, чем 20 рублей за литр), вторая хозяйка покупала больше молока, чем первая, а в те дни, когда молоко дорогое (стоит больше, чем 20 рублей за литр), вторая хозяйка покупала меньше молока, чем первая. Таким образом, вторая хозяйка действовала более экономно. Поскольку денег они потратили одинаково, то вторая хозяйка купила молока больше.

$\boxed{3}$ **Решение.** Первое взвешивание: Разделим монеты на три кучки по три монеты. Кладём на первую чашку весов первую кучку, а на вторую чашку — вторую. Если чашки находятся в равновесии, то, значит, на весах фальшивой монеты нет, тогда она в третьей кучке. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета в более лёгкой кучке. Таким образом первым взвешиванием мы выделили группу из трёх монет, среди которых находится фальшивая.

Второе взвешивание: Из выделенной кучки одну монету кладём на первую чашку весов, вторую монету — на вторую. Третью монету откладываем. Если весы показывают, что одна из монет легче, то эта монета фальшивая. Если весы находятся в равновесии, то фальшивая третья монета.

$\boxed{4}$ **Ответ:** 435.

Решение. Задача сводится к тому, чтобы посчитать сумму чисел от 1 до 29. Разобьём эти числа на пары: 1 и 29, 2 и 28, 3 и 17 , ..., 14 и 16. Ещё число 15 останется без пары. Всего есть 14 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 30. Тогда сумма всех чисел равна $30 \cdot 14 + 15 = 435$.

$\boxed{5}$ **Ответ:** 2200\$.

Решение. За неотработанные 4 месяца молодой человек недополучил 1600\$. Значит, один месяц его работы стоит 400\$. Таким образом, год работы стоит $400\$ \cdot 12 = 4800\$$. Тогда «Запорожец» стоил $4800\$ - 2600\$ = 2200\$$.

$\boxed{6}$ **Ответ:** начинающий.

Решение. Начинающий выиграет, если будет играть следующим образом.

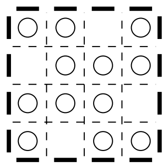
Своим первым ходом он кладёт монету так, чтобы её центр совпал с центром стола. Далее, каждым своим следующим ходом он кладёт монету так, чтобы она была симметрична относительно центра стола той монете, которую положил второй игрок своим последним ходом. Первый всегда может это сделать, так как после каждого его хода расположение монет симметрично относительно центра стола (то есть, если некоторая точка поверхности стола накрыта монетой, то и симметричная ей точка относительно центра стола накрыта, а если она не накрыта монетой, то и симметричная точка не накрыта). Таким образом, если второй смог найти место, чтобы положить монету, то есть точно такой же свободный участок по форме и по площади. Как видим, следуя такой стратегии, начинающий всегда может ответить на ход соперника своим ходом. Рано или поздно класть монеты будет некуда, но так как первый всегда может сделать ход, то проиграет второй игрок.

$\boxed{7}$ **Решение.** Кладём в одну кучу 15 монет и все их переворачиваем. Тогда если в этой куче изначально было x орлов, то теперь стало $15-x$ (орлы стали решками, а решки — орлами). Так как всего орлов было 15, то в другой куче их тоже $15-x$.

Листок 7. Разрезания

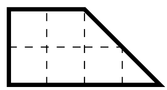
1 Разрежьте квадрат на **а)** 4; **б)** 9; **в)** 17 квадратов.

2 Четыре гнома получили от дяди в наследство сад, обнесенный 16 спичками, в котором растут 12 плодовых деревьев. Расположение деревьев указано на рисунке. Разделите сад с помощью 12 спичек на четыре равные части, содержащие по равному числу деревьев, при этом деревья не должны касаться ограды. (Равные части должны иметь одинаковую форму и размер.)



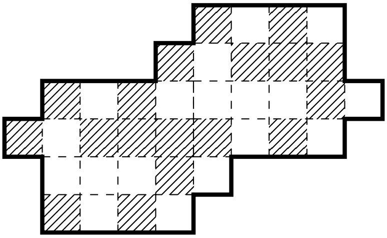
3 Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось пять корок. Как такое могло быть?

4 Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части.



5 Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами по прямой. Могла ли салфетка распасться **а)** на 2 части; **б)** на 3 части; **в)** на 4 части; **г)** на 5 частей?

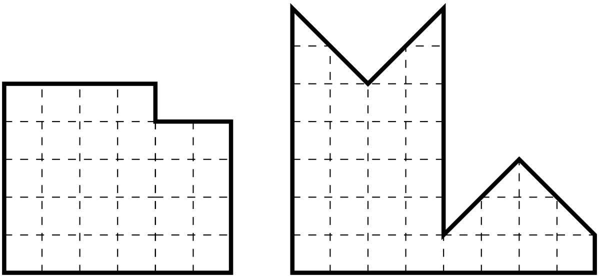
$\boxed{6}$ Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на четыре одинаковые части так, чтобы из них можно было сложить квадрат размером 6×6 с шахматной раскраской.



$\boxed{7}$ **а)** Разрежьте прямоугольник 4×9 на две части, из которых можно сложить квадрат 6×6.

б) Разрежьте прямоугольник 9×16 на две части, из которых можно сложить квадрат.

$\boxed{8}$ Разрежьте каждую из следующих фигур на две одинаковые части.



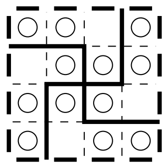
Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Решение. а)** Делим каждую сторону квадрата на две равные части и соединяем точки деления, лежащие на противоположных сторонах.

б) Делим каждую сторону квадрата на три равные части и соединяем соответствующие точки деления, лежащие на противоположных сторонах.

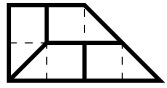
в) Берём разбиение из пункта б) и один из квадратов делим ещё на 9 частей.

$\boxed{2}$ **Решение.**

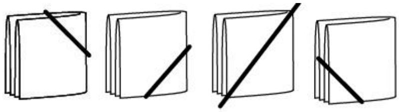


$\boxed{3}$ **Решение.** Вырезали цилиндрический кусочек с двумя корочками, а оставшееся разрезали на три части.

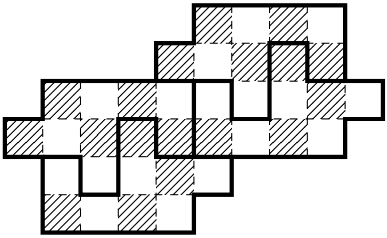
$\boxed{4}$ **Решение.**

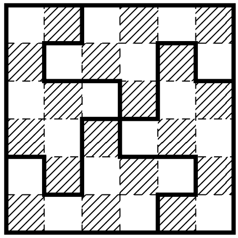


$\boxed{5}$ **Ответ:** Во всех пунктах ответ — да. **Решение.**

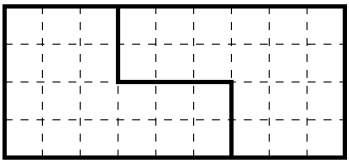


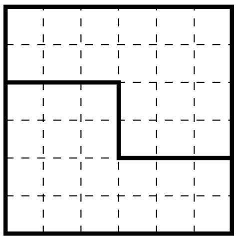
$\boxed{6}$ **Решение.**





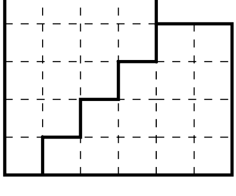
$\boxed{7}$ **Решение.**

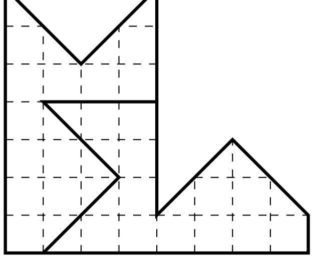




В пункте б) аналогичное разрезание «лесенкой».

$\boxed{8}$ **Решение.**





Листок 8. Принцип Дирихле

1 Восемь кроликов посадили в семь клеток. Докажите, что есть клетка, в которой оказалось по крайней мере два кролика.

2 За победу в математической регате команда из 4 человек получила 10 конфет. Дети поделили конфеты между собой, не разламывая их. Определите, верны ли следующие утверждения:

а) «кому-то досталось по крайней мере две конфеты»;

б) «кому-то досталось по крайней мере три конфеты»;

в) «двум людям досталось по крайней мере две конфеты»;

г) «каждому досталась хотя бы одна конфета».

3 **а)** В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 24 чёрных и 24 синих носка. Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?

б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару чёрных носков?

в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 12 пар чёрных и 12 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а) и пару черного цвета (как в пункте б)? (Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.)

4 В лесу растут миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что есть две ёлки с одинаковым количеством иголок.

5 В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

6 В квадратном ковре со стороной 4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик со стороной 1 метр, в котором дырок не будет.

7 В финале школьного чемпионата по баскетболу команда 5А забила 9 мячей. Докажите, что найдутся 2 игрока этой команды, забившие поровну мячей. (В команде по баскетболу 5 игроков.)

8 Верно ли, что в вашей аудитории есть по крайней мере два человека, имеющие одинаковое число друзей в этой аудитории? Верно ли это для любой аудитории Малого мехмата?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Решение.** Если бы ни в какой клетке не было двух кроликов, то всего их было бы не больше, чем клеток, то есть, максимум 7. Но кроликов 8, противоречие.

$\boxed{2}$ **Ответ:** а) и б) верны, в) и г) нет.

Решение. а) Если бы никому не досталось две конфеты, то конфет всего было бы не больше 4. Но их 10, противоречие.

б) Если бы никому не досталось три конфеты, то конфет всего было бы не больше $2 \cdot 4 = 8$. Но их 10, противоречие.

в, г) Теоретически, все конфеты мог забрать, например, один человек.

$\boxed{3}$ **Ответ: а)** 3; **б)** 26; **в)** 25 и 37.

Решение. а) Если взять только два носка, то они могут оказаться разных цветов, и составить из них пару не получится. А из трёх носков два точно будут одного цвета.

б) Если взять 25 носков, то 24 из них могут оказаться синими, и составить чёрную пару не получится. Если же взять 26 носков, то синих среди них не может быть больше 24, поэтому точно будут два чёрных.

в) Если взять 24 ботинка, то все они могут оказаться левыми, и составить пару из них не получится. Разобьём все 48 ботинок на пары. Пар будет 24. Если взять 25 ботинок, то два из них точно будут из одной пары.

Если взять 36 ботинок, то 24 из них могут оказаться синими, а остальные 12 — левыми чёрными, и составить из них чёрную пару не получится. Если взять 37 ботинок, то хотя бы 13 из них будут чёрными, а значит, будет точно хотя бы один чёрный левый и хотя бы один чёрный правый.

$\boxed{4}$ **Решение.** У ёлки может быть $0, 1, 2, \ldots, 600000$ иголок — всего600001 возможный вариант, а ёлок больше (1000000). Значит, какой-то вариант точно повторяется, т.е. найдутся две ёлки с одинаковым количеством иголок.

$\boxed{5}$ **Решение.** Если такого класса нет, то учеников в школе не может быть больше, чем $33 \cdot 30 = 990 < 1000$, противоречие.

$\boxed{6}$ **Решение.** Разобьём ковёр на 16 маленьких ковриков размером 1×1. Так как дырок всего 15, хотя бы один квадратик окажется без дырок. Его и можно вырезать.

$\boxed{7}$ **Решение.** Предположим, что такие два игрока не найдутся. Тогда все пять игроков забили разное количество мячей. Пусть первый игрок ничего не забил, второй забил один мяч, третий — два, четвёртый — три, пятый — четыре. Тогда всего игроки забили 10 мячей. Если же кто-то забил больше, чем мы предположили, то и всего мячей было забито больше. Но поскольку по условию игроки забили 9 мячей, наше предположение неверно. Значит, есть два игрока, забившие поровну.

$\boxed{8}$ **Решение.** Да, верно. Проведём рассуждения сразу для любой аудитории.

Пусть в аудитории n человек, и у всех из них разное количество друзей. Друзей может быть $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Всего n возможных вариантов. А так как человек тоже n, то все эти варианты используются. Значит, есть человек, у которого 0 друзей, т. е. который ни с кем не дружит. И есть человек, у которого $(n-1)$ друг, т.е. который дружит со всеми. Однако этого быть не может, т.к. эти два человека должны одновременно и дружить, и не дружить друг с другом. Получаем противоречие. Значит, два человека с одинаковым количеством друзей всегда найдутся.

Листок 9. Переливания

$\boxed{\mathbf{1}}$ Есть два ведра: одно ёмкостью 4 л, другое — 9 л. Можно ли только с их помощью набрать из реки ровно 6 литров воды?

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Можно ли, имея две банки ёмкостью 3 л и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 литра воды?

б)Тот же вопрос, если есть только банки ёмкостью 6 л и 9 л?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Отлейте из цистерны 13 литров воды, пользуясь бидонами в 5 л и 17 л.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Можно ли набрать из реки 8 литров воды с помощью двух ведёр, вместимостью 15 л и 16 л?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Есть три кастрюли: 8 л — с компотом, 3 л и 5 л — пустые. Как разделить компот пополам? (Компот, в отличие от воды, выливать нельзя.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ Можно ли разлить 50 литров бензина по трём бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а во втором на 21 литр больше, чем в третьем?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Каша варится 15 минут. Как с помощью этих часов отмерить нужное время?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Есть две одинаковые чашки: одна с кофе, другая с молоком. Из первой чашки во вторую перелили ложку кофе. Затем ложку получившейся смеси перелили обратно из второй чашки в первую. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Есть три сосуда 3л, 4л и 5л, кран с водой и 3 литра сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** можно.
Решение.

ведро 4л	ведро 9л
	9
4	5
0	5
4	1
0	1
1	0
1	9
4	**6**

$\boxed{2}$ **а) Ответ:** можно.
Решение.

банка 3л	банка 5л
	5
3	2
0	2
2	0
2	5
3	**4**

б) Ответ: нельзя.
Решение. Так как и 6, и 9 делятся на 3, то после любого количества переливаний объём воды (в литрах) в каждой из банок будет делиться на 3. Но 1 на 3 не делится.

$\boxed{3}$ **Решение.**

бидон 5л	**бидон 17л**
5	
0	5
5	5
0	10
5	10
0	15
5	15
3	17
3	0
0	3
5	3
0	8
5	8
0	**13**

$\boxed{4}$ **Решение.** Можно.

ведро 15л	**ведро 16л**
15	
0	15
15	15
14	16
14	0
0	14
15	14
13	16
13	0
0	13
15	13
12	16

и т.д.

5 **Решение.**

кастрюля 8л	кастрюля 3л	кастрюля 5л
8	0	0
5	3	0
5	0	3
2	3	3
2	1	5
7	1	0
7	0	1
4	3	1
4	0	4

6 **Ответ:** нельзя.

Решение. Если бы это было возможно, то во втором баке должно было бы быть не меньше 21 л бензина (так как иначе в нём не могло бы быть на 21 литр больше, чем в третьем). Значит, в первом баке должно быть не меньше 31 л, так как в нём на 10 литров больше, чем во втором. Но тогда только в первом и втором должно быть не меньше $21 + 31 = 52$ литров. Противоречие.

7 **Решение.** Переворачиваем и те, и другие часы. Когда песок из 7-минутных часов высыпется, переворачиваем их опять. Ещё через 4 минуты закончится песок в 11-минутных часах. В этот момент надо перевернуть 7-минутные часы. Когда песок в них пересыпется обратно, пройдёт ровно 15 минут.

8 **Ответ:** одинаково.

Решение. Во время второго переливания кофе в ложке столько же, сколько молока было взято во время первого переливания.

9 **Решение.** Можно.

сосуд 3л	**сосуд 4л**	**сосуд 5л**
3с		
	3с	
	3с	5в
3в	3с	2в
	3с	2в
3с		2в
3с	2в	
1с	2в+2с	
	2в+2с	1с
1,5в+1,5с	0,5в+0,5с	1с
	0,5в+0,5с	1,5в+2,5с
	0,5в+0,5с	2,5в+2,5с

Листок 10. Удивительный остров

Действие почти во всех задачах происходит на некотором острове, жителями которого являются рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

1 Человек говорит: «Я лжец». Может ли он быть жителем острова рыцарей и лжецов?

2 Каждый из собравшихся на площади жителей острова заявил остальным: «Вы все лжецы». Сколько рыцарей среди них?

3 На улице встретились два жителя острова. Один из них сказал: «По крайней мере, один из нас рыцарь». Второй ему ответил: «Ты лжец». Кто из них кто?

4 Каждый из **а)** 7; **б)** 9 сидящих за круглым столом жителей острова сказал: «Мои соседи лжец и рыцарь». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом?

5 Какой вопрос нужно задать жителю острова, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?

6 Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады тебя отпустить, но по нашему закону ты должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы тебя съедим. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Что нужно сказать Робинзону, чтобы не быть съеденным?

7 Некоторые жители острова заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

8 Знайка задумал несколько целых чисел и сообщил их Незнайке. В интервью газете «Жёлтый листок» Незнайка сказал: «Знайка дал мне три числа. Их сумма равна 201, а произведение равно 30030». Докажите, что Незнайка соврал.

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** не может.

Решение. Если бы он был рыцарем, то он бы сказал неправду, что он лжец, чего быть не может. Если же он был бы лжецом, то он сказал бы правду, что также невозможно.

$\boxed{2}$ **Ответ:** 1.

Решение. Среди присутствующих на площади не может быть двух (или более) рыцарей, так как они называли бы друг друга лжецами.

Один рыцарь быть может. Он всем остальным говорит, что они лжецы (это правда). А каждый из лжецов, говорит всем остальным, среди которых есть рыцарь, что они лжецы (это неправда).

0 рыцарей быть не может, так тогда все лжецы говорили бы правду.

$\boxed{3}$ **Ответ:** первый — рыцарь, второй — лжец.

Решение. Предположим, что первый — рыцарь. Тогда его утверждение верно (действительно хотя бы один рыцарь есть). Второй говорит, что первый лжец. При нашем предположении это неправда, значит, второй — лжец. Всё подходит, противоречий нет.

Разберём другой случай, когда первый — лжец. Тогда его утверждение неверно, значит, и первый, и второй лжецы. Но тогда второй говорит правду, что первый лжец. Такого быть не может, получается противоречие. Значит, возможен только первый случай.

$\boxed{4}$ **а) Ответ:** 0 рыцарей, 9 лжецов или 6 рыцарей, 3 лжеца.

Решение. Во-первых, возможен случай, когда все лжецы.

Предположим, что есть хотя бы один рыцарь. Тогда его соседи лжец и рыцарь: Л—Р—Р. Далее справа должен сидеть лжец, чтобы второй рыцарь говорил правду: Л—Р—Р—Л. Чтобы лжец говорил неправду, справа должен сидеть рыцарь: Л—Р—Р—Л—Р. Продолжая цепочку, получим: —Л—Р—Р—Л—Р—Р—Л—. Цепочка замыкается (то есть самый левый сидит рядом с самым правым). Получается, что крайние на схеме лжецы говорят правду, такого быть не может.

б) Ответ: 0 рыцарей, 7 лжецов.

Решение. Возможен случай, когда все лжецы.

Если есть хотя бы один рыцарь, то проведём рассуждения, пункту а). Получим такое расположение: —Л—Р—Р—Л—Р—Р—Л—Р—Р—. Всё подходит.

$\boxed{5}$ **Решение.** «Что ты ответишь, если у тебя спросят, живёт ли у тебя дома ручной крокодил?»

$\boxed{6}$ **Решение.** «Меня съест лев».

$\boxed{7}$ **Ответ:** не может.

Решение. Для начала заметим, что одну и ту же фразу не могут произносить и рыцари, и лжецы, так как иначе они бы противоречили друг другу. Поэтому возможны четыре случая:

I. первое утверждение сделали рыцари и второе рыцари (то есть, лжецов нет);

II. первое — рыцари, второе — лжецы;

III. первое — лжецы, второе — рыцари;

IV. первое — лжецы, и второе тоже лжецы (то есть, рыцарей нет).

На самом деле первый случай невозможен, так как тогда рыцари бы утверждали, что лжецов нечётное число, хотя их ноль (то есть, говорили бы неправду). А второй случай невозможен, так как тогда бы лжецы утверждали, что рыцарей чётное число, а их ноль (то есть, говорили бы правду).

Значит, возможны только случаи II и III. Во втором случае получается, что рыцарей чётное число, и лжецов чётное. То есть, всего чётное число людей. В третьем случае, рыцарей — нечётное, и лжецов — нечётное. Всего чётное число людей.

Как видим, нечётного числа людей не может быть ни в одном из случаев.

$\boxed{8}$ **Решение.** Чтобы сумма трёх чисел была равна нечётному числу 201, либо они все должны быть нечётными, либо одно из них должно быть нечётным, а два — чётными. Но в первом случае их произведение должно быть тоже нечётным (а 30030 — чётное). А во втором, произведение должно делиться на 4, так как присутствуют два чётных множителя, но 30030 на 4 не делится.

Листок 11. Арифметика и весы

$\boxed{\mathbf{1}}$ Три носорога весят столько же, сколько четыре бегемота и один крокодил. Кто тяжелее: носорог или бегемот?

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3 карася тяжелее 4 окуней. Что тяжелее: 4 карася или 5 окуней?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Груша и слива весят столько, сколько 2 яблока; 4 груши весят столько, сколько 5 яблок и 2 сливы. Что тяжелее: 7 яблок или 5 груш?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Маленькому Гоше подарили весы, и он начал взвешивать игрушки. Машину уравновесили мяч и 2 кубика, а машину с кубиком уравновесили 2 мяча. Сколько кубиков уравновесят машину?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Метрострой нанял двух кротов рыть туннель. Первый крот работает быстрее второго, но платят обоим одинаково, учитывая только время. Что выгоднее: чтобы первую половину тоннеля выкопал один крот, а вторую — другой; или, чтобы они начали копать с двух сторон одновременно и копали бы до встречи?

$\boxed{\mathbf{6}}$ 9 одинаковых конфет стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же конфет — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна конфета?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Малышу и Карлсону дали по одинаковому пирогу. Карлсон начал есть свой пирог на минуту позже Малыша, а через две минуты после этого оказалось, что Карлсон уже съел столько, сколько еще осталось съесть Малышу. Докажите, что если бы Малыш и Карлсон ели один пирог вдвоем, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты.

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** носорог.
Решение. Уберём крокодила и одного бегемота. Получится, что 3 носорога, тяжелее, чем 3 бегемота. А значит, один носорог тяжелее бегемота.

$\boxed{2}$ **Ответ:** 4 карася.
Решение. Составим такую схему:

$$3 \text{ карася} > 4 \text{ окуня.}$$

Так как карасей меньше, но весят они больше, то значит, один карась тяжелее одного окуня. Если в неравенство слева добавить ещё карася, а справа окуня, то левая часть останется больше (так как к большему добавили большее).

$\boxed{3}$ **Ответ:** 5 груш тяжелее.
Решение.

$$2 \text{ яблока} = \text{груша} + \text{слива}$$

$$5 \text{ яблок} + 2 \text{ сливы} = 4 \text{ груши}$$

Сложив левые и правые части равенств, получим:

$$7 \text{ яблок} + 2 \text{ сливы} = 5 \text{ груш} + \text{слива.}$$

Уберём по одной сливе:

$$7 \text{ яблок} + \text{слива} = 5 \text{ груш.}$$

Если убрать сливу, то 5 груш перевесят 7 яблок.

$\boxed{4}$ **Ответ:** 5.
Решение. По условию

$$\text{машина} = \text{мяч} + 2 \text{ кубика.}$$

Тогда

$$2 \text{ машины} = 2 \text{ мяча} + 4 \text{ кубика.}$$

Но также по условию 2 мяча по весу равны машине и кубику. Значит,

$$2 \text{ машины} = \text{машина} + \text{кубик} + 4 \text{ кубика}.$$

Убираем из обеих частей равенства по машине:

$$\text{машина} = 5 \text{ кубиков}.$$

$\boxed{5}$ **Ответ:** выгоднее второй вариант.

Решение. Разделим туннель на одинаковые очень маленькие участки. За каждый участок нужно платить в зависимости от того, за какое время он прорыт: чем быстрее, тем меньше платить. Так как первый крот роет быстрее, то платить ему нужно меньше. Следовательно, выгоднее, чтобы он прорыл как можно большую часть тоннеля. Если каждый будет копать свою часть, то первым кротом будет прорыта ровно половина туннеля. А если копать до встречи, то так как первый копает быстрее, то эта встреча произойдёт на половине второго, а значит, второй пророет больше половины.

$\boxed{6}$ **Ответ:** 1 р. 23коп.

Решение. 9 конфет стоят 11 рублей с копейками, т.е. не меньше 11 рублей, что составляет 1100 копеек. Значит, одна конфета не может стоить меньше 123 копеек= 1р.23коп. 13 конфет стоят 15 рублей с копейками, т.е. строго меньше 16 рублей, что составляет 1600 копеек. Значит, одна конфета не может стоить больше 123 копеек= 1р.23коп.

$\boxed{7}$ **Ответ:** 8.

Решение. Обозначим количество орехов в ящиках a, b, c соответственно. Тогда условие задачи можно записать так:

$$a + 6 = b + c$$

$$b + 10 = a + c.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$a + b + 16 = a + b + c + c.$$

Убираем одинаковые буквы-ящики:

$$16 = c + c.$$

А значит, одно c равно 8, т.е. в третьем ящике 8 орехов.

$\boxed{\mathbf{8}}$ **Решение.** Из того что Карлсон уже съел столько, сколько еще осталось съесть Малышу, следует, что если бы они ели не два пирога, а один и тот же, то он был бы съеден. При этом в течение этих трёх минут Карлсон ел не всё время. Значит, если бы они с Малышом начали есть один пирог, причём одновременно, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты.

Листок 12. Можно или нельзя

Во всех задачах сегодняшнего занятия нужно дать ответ «Да» или «Нет». Если ответ «Да», то нужно привести пример, когда такое может быть. Если ответ «Нет», то нужно объяснить, почему.

1 Ваня говорит: «Позавчера мне было ещё только 10 лет, а в следующем году исполнится уже 13». Может ли такое быть?

2 Можно ли на шахматной доске расставить 9 ладей так, чтобы они не били друг друга?

3 **а)** Существуют ли такие два последовательных натуральных числа, что сумма цифр каждого из них делится на 4?

б) А два последовательных числа с равной суммой цифр?

4 Может ли в месяце быть **а)** 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 6 воскресений?

5 Можно ли разрезать квадрат на квадратики двух размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших?

6 Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?

7 Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

8 На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11000 км. Сможет ли правительство страны соединить сетью дорог все свои города?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** да, может.

Решение. Пусть Ваня родился 31 декабря 1999 года. А сегодня 1 января 2011 года. Тогда позавчера, 30 декабря, Ване было 10 лет. На следующий день, 31 декабря, будет его День Рождения, и ему исполнится 11 лет. В этом, 2011 году ему исполнится 12 лет, а в следующем, 2012 году ему исполнится 13 лет.

$\boxed{2}$ **Ответ:** нет, нельзя.

Решение. В каждом столбце шахматной доски может стоять не более одной ладьи. Значит, на всей доске может стоять не более 8 ладей. Но $9 > 8$, значит, так расставить 9 ладей не удастся.

$\boxed{3}$ **а) Ответ:** да, существуют.

Решение. Например, 39 и 40.

б) Ответ: нет, не существуют.

Решение. Известно, что число дает такой же остаток при делении на 3, что и сумма его цифр. У двух последовательных чисел остатки при делении на 3 разные, значит, и у сумм их цифр тоже разные. Таким образом, они не могут быть равны.

$\boxed{4}$ **а) Ответ:** нет, не может.

Решение. Предположим, что это произошло, например, в месяц M. Ясно, что если бы M начинался в понедельник, то воскресений в нем было не больше, чем есть сейчас. Но тогда бы в M было всего три недели и еще 6 дней, т.е. всего 27 дней. Но минимальное количество дней в месяце — 28. Значит, такого не может быть.

б) Ответ: да, может.

Решение. См. пример на рисунке. Это февраль 2011 года.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
28						

в) Ответ: да, может.

Решение. См. пример на рисунке. А это май 2011 года.

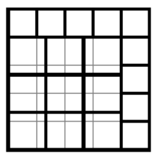
						1
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**					

г) Ответ: нет, не может.

Решение. Если такое возможно, то в этом месяце умещается целиком 5 недель. Т.е. в нем хотя бы 35 дней. Но такого быть не может.

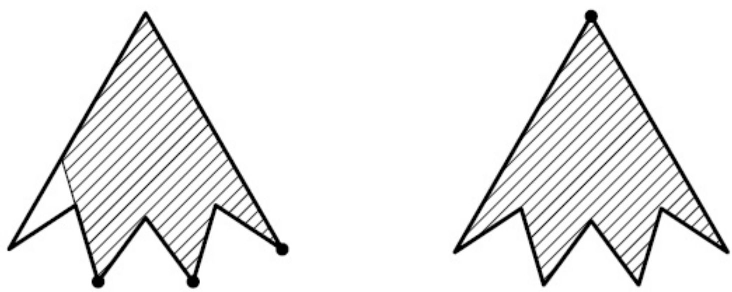
$\boxed{5}$ **Ответ:** да, можно.

Решение. См. рис.



$\boxed{6}$ **Ответ:** Да, могло.

Решение. Пример см. на рис. Лампочки обозначены кружочками.



$\boxed{7}$ **а) Ответ:** 10, 10 и 80 конфет.

Решение. Покажем, что ответ удовлетворяет условию. Если Лисе достанется 80 конфет, то задача решена. Если ей достанется 10 конфет, то ей придется уровнять кучки медвежат и забрать 70 конфет. Так, она съесть $10 + 70 = 80$ конфет.

б) Ответ: нет, не может.

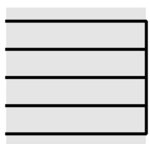
Решение. Медвежата съедят одинаковое число конфет. Значит, в сумме они съедят четное число конфет. Но т.к. 100 — четное число, то и Лиса съест четное число. Но 65 — нечетное, т.е. такого не может быть.

8. Ответ: да, сможет.

Решение. Построим 5 горизонтальных дорог длиной 1000 км так, чтобы верхняя и нижняя отставали от верхней и нижней границы на 100 км, а между соседними дорогами было расстояние 200 км (см. рис.). Еще построим вертикальную дорогу, соединяющую верхнюю и нижнюю. Уже построено

$$5 \cdot 1000 + 800 = 5800 \text{ км дорог.}$$

Заметим, что дороги образуют сеть. Чтобы все города образовывали сеть, достаточно соединить каждый из них с уже построенными дорогами. Заметим, что расстояние от любого города до ближайшей горизонтальной дороги не превосходит 100 км. Значит, сумма таких расстояний не превосходит $51 \cdot 100 = 5100$ км. $5100 + 5800 < 11000$, значит, стране удастся справиться.



Листок 13. Пары и чередование

$\boxed{\mathbf{1}}$ Барон Мюнхаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?

$\boxed{\mathbf{2}}$ В джунглях во время кругосветного путешествия на Мюнхаузена напали пантеры. Когда он проскочил мимо двух из них, они бросились на него, промахнулись и загрызли друг друга. Мюнхаузен повторял этот манёвр ещё раз и ещё, до тех пор, пока все они не загрызли друг друга. По словам Мюнхаузена всего было 97 пантер. Правда ли это?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Кузнечик прыгает по прямой — каждый раз на 1 метр влево или вправо. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Из комплекта домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости по правилам выложить в ряд?

$\boxed{\mathbf{5}}$ За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик–девочка и девочка–мальчик чётно.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 30 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только: **а)** через целое число часов; **б)** через чётное число часов.

$\boxed{\mathbf{7}}$ На шахматной доске стоят 8 ладей, из которых никакие две не бьют друг друга. Докажите, что число ладей стоящих на чёрных полях чётно.

$\boxed{\mathbf{8}}$ К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** нет.

Решение. Заметим, что после четного числа пересечений Мюнхаузен будет находиться с той же стороны от границы, что и до этого. Поскольку 7 — нечетное число, такого быть не могло.

$\boxed{2}$ **Ответ:** нет.

Решение. Так как каждый раз какие-то две пантеры загрызали друг друга, то после каждого маневра число пантер уменьшалось на 2. В конце пантер не осталось, значит, вначале их было четное число.

$\boxed{3}$ **Решение.** Пусть A — исходная точка. Заметим, что после каждого прыжка расстояние до точки A меняет четность. Изначально расстояние равно нулю. Значит, когда он вновь попадет в исходную точку, он совершит четное число прыжков.

$\boxed{4}$ **Ответ:** нет.

Решение. Заметим, что среди оставшихся доминошек тройка встречается 7 раз. Значит, она — с краю. Аналогично получим, что с краю находятся остальные 5 доминошек. Противоречие

$\boxed{5}$ **Решение.** Объединим каждую группу подряд сидящих мальчиков в одного мальчика, а каждую группу подряд сидящих девочек в одну девочку. Тогда поскольку дети одного пола рядом теперь не сидят, между ними четное число мест, а, значит, и число требуемых пар четно.

$\boxed{6}$ **Решение.** Заметим, что чтобы вернуться в исходную точку, нужно пройти одинаковое расстояние влево и вправо, а также вверх и вниз. Пусть улитка поднималась вверх a раз, а влево — b раз. Тогда она ползла $2 \cdot 30 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b = 60(a+b)$. Отсюда следует, что она ползла четное число часов. Поскольку после каждого движения по вертикали следует движение по горизонтали и наоборот, то числа a и b одной четности. Значит, улитка ползла четное число часов.

$\boxed{7}$ **Решение.** Пронумеруем числами от 1 до 8 вертикали слева направо и горизонтали сверху вниз соответственно. *Суммой координат* клетки назовем сумму номеров ее вертикали и горизонтали. Тогда пусть у черных клеток сумма координат четна, тогда у белых она нечетна. Заметим, что сумма координат клеток, на которых стоят 8 ладей, четна (она равна удвоенной сумме чисел от 1 до 8). Но тогда число ладей, стоящих на белых клетках, четно (сумма координат белой клетки нечетна), значит, и число ладей на черных клетках четно.

$\boxed{8}$ **Решение.** Предположим, что все цифры суммы нечетны. Разберем два случая.

1) Сумма первой и последней цифры числа меньше 10. Ясно, что в этом случае не будет ни одного перехода через разряд. Действительно, допустим в предпоследнем разряде произошел переход через десяток, но тогда сумма первой и последней цифры четна, что неверно по предположению. Продолжая так далее, получим треуемое. Но тогда, складывая средние цифры чисел, получим четную цифру.

2) Сумма первой и последней цифры числа не меньше 10. Тогда получим что переход через разряд чередуется с непереходом через разряд при движении справа налево. Но тогда в десятом разряде не будет перехода, и в девятом разряде сложатся две одинаковые цифры, т.е. получится четная цифра.

Листок 14. Комбинаторика

$\boxed{\textbf{1}}$ Из деревни Филимоново в деревню Ксенофонтово ведут три дороги, а из деревни Ксенофонтово в деревню Оладушкино — четыре дороги. Сколько существует путей из деревни Филимоново в деревню Оладушкино?

$\boxed{\textbf{2}}$ От дачного посёлка проложили две дороги до деревни Филимоново и одну дорогу до Оладушкино. Сколько теперь существует путей от Филимоново до Оладушкина?

$\boxed{\textbf{3}}$ В киоске продаются открытки, на каждой из которых изображены цветы: либо розы, либо гвоздики, либо тюльпаны. Кроме того, на каждой открытке есть поздравительная надпись: либо «С Днём рождения!», либо «С Новым годом!», либо «С 8 марта!». Какое наибольшее число различных открыток может продаваться в этом киоске?

$\boxed{\textbf{4}}$ В магазине «Всё для чая» есть 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 2 вида ложек. Сколькими способами в этом магазине можно купить:

а) набор из чашки, блюдца и ложки;

б) набор, состоящий из двух разных предметов?

$\boxed{\textbf{5}}$ Назовём натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только чётные цифры. Сколько существует четырёхзначных «симпатичных» чисел?

$\boxed{\textbf{6}}$ В футбольной команде нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать? (В футбольной команде 11 игроков.)

$\boxed{\textbf{7}}$ В классе учатся 25 человек. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных?

$\boxed{\textbf{8}}$ Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трёх букв: А, Б и В. Словом называется любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

$\boxed{\textbf{9}}$ Меню школьной столовой не меняется и состоит из 10 блюд. Для разнообразия Витя хочет каждый день заказывать такой набор блюд, который он ещё ни разу не заказывал (при этом число блюд не важно — он может заказать все 10 блюд, а может заказать только одно или вовсе ни одного). Сколько дней он сможет так питаться?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** 12.

Решение. Из Филимоново в Ксенофонтово можно доехать тремя способами. Для каждого такого способа есть еще 4 варианта доехать до Оладушкино. Значит, ответ $3 \cdot 4 = 12$.

$\boxed{2}$ **Ответ:** 14.

Решение. Рассмотрим пути из Филимоново до Оладушкино. Каждый из этих путей либо проходит через дачный поселок, либо нет. Путей, не проходящих через него, 12 (см. 1 задачу). Путей, проходящих через дачный поселок всего 2. Значит, всего путей $12 + 2 = 14$.

$\boxed{3}$ **Ответ:** 9.

Решение. Для каждого из трех видов цветов есть еще три способа сделать надпись. Значит, всего видов открыток $3 \cdot 3 = 9$. А это и есть наибольшее число различных открыток, которое может продаваться в киоске.

$\boxed{4}$ **а) Ответ:** 40.

Решение. Чашку можно выбрать 5 способами, блюдце — 4 и ложку — 2. Значит, всего способов $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$.

б) Ответ: 38.

Решение. Этот набор может состоять из чашки и блюдца (таких наборов $5 \cdot 4 = 20$), чашки и ложки (таких наборов $5 \cdot 2 = 10$) или блюдца и ложки (таких наборов $4 \cdot 2 = 8$). Т.е. всего способов $20 + 10 + 8 = 38$.

$\boxed{5}$ **Ответ:** 500.

Решение. На первое место симпатичного четырехзначного числа можно поставить одну из четырех цифр: 2, 4, 6, 8. На каждую из оставшихся трех позиций можно поставить одну из пяти цифр: 0, 2, 4, 6, 8. Значит, всего симпатичных четырехзначных чисел $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

$\boxed{6}$ **Ответ:** 110.

Решение. Капитана можно выбрать 11 способами, а для каждого способа выбрать капитана есть еще 10 способов выбрать его заместителя. Т.е. всего способов $11 \cdot 10 = 110$.

$\boxed{7}$ **Ответ:** 300.

Решение. Сначала найдем количество способов выбрать старшего дежурного и его помощника. Это можно сделать $25 \cdot 24$ способами. Заметим, что каждая пара из двух человек A и B была посчитана дважды (когда B помощник A и A помощник B). Значит, всего способов выбрать двух дежурных $24 \cdot 25 : 2 = 12 \cdot 25 = 300$.

$\boxed{8}$ **Ответ:** 120.

Решение. Отдельно посчитаем количество слов из одной, двух, трех и четырех букв. Каждую букву в каждом слове можно выбрать тремя способами. Т.е. всего слов $3+3^2+3^3+3^4 = 3+9+27+81 = 120$.

$\boxed{9}$ **Ответ:** 1024.

Решение. Заметим, что каждое блюдо можно либо заказать, либо нет. Т.е. для каждого блюда есть два варианта. Тогда всего разных заказов можно составить

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024.$$

Значит, Витя сможет так питаться 1024 дня.

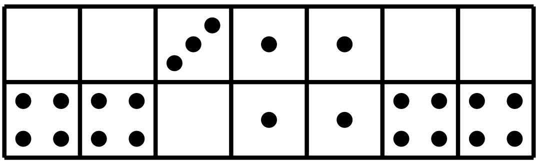
Листок 15. Перебор вариантов

1 Выпишите все наборы из трёх цифр, каждая из которых равна 1, 2 или 3, если порядок цифр неважен (т.е. наборы 112 и 121 считаются одинаковыми).

2 В коробке лежат синие, красные и зеленые карандаши. Всего 20 штук. Синих в 6 раз больше, чем зеленых, красных меньше, чем синих. Сколько в коробке красных карандашей?

3 В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели могло быть 20-е число этого месяца?

4 В коробке лежат костяшки домино. На рисунке показано только, как расположены половинки доминошек, но не показаны границы. Определите, как они проходят.



5 Перечислите все четвёрки натуральных чисел, дающих в сумме 15.

6 Летела стая одноголовых сороконожек и трёхголовых драконов. Вместе у них 648 ног и 39 голов. Сколько ног у дракона?

7 Поставьте вместо многоточий числа так, чтобы получилось верное высказывание: «В этом предложении цифра 0 встречается . . . раз, цифра 1 — . . . раз, 2 — . . . раз, 3 — . . . раз, 4 — . . . раз, 5 — . . . раз, 6 — . . . раз, 7 — . . . раз, 8 — . . . раз, 9 — . . . раз». (Слово «раз» может склоняться.)

8 Найдите путь от левого верхнего «а» до правого нижнего «я», который проходит по одному разу через каждую букву алфавита. (Ходить можно на соседнюю букву по вертикали или горизонтали.)

а	о	д	т	ч	з	у	а
р	и	щ	ш	й	п	к	ю
ю	й	н	ы	ж	е	щ	е
п	г	л	ц	ь	ъ	э	б
ч	и	б	ш	г	ъ	ф	л
д	м	ь	ж	н	э	с	е
х	ё	ц	о	ы	ф	р	с
в	к	з	в	ё	м	х	я

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** 111, 112, 113, 122, 123.

Решение. Будем считать набор трехзначным числом. Достаточно выписать все трехзначные числа, состоящие только из единиц, двоек и троек, цифры которых идут в порядке неубывания. Числа можно выписать, например, в порядке возрастания.

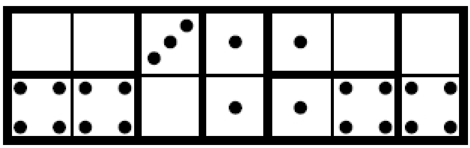
$\boxed{2}$ **Ответ:** 6.

Решение. Пусть в коробке лежит a зеленых и b красных карандашей. Тогда синих карандашей $6a$. Тогда всего карандашей в коробке $a + b + 6a = 7a + b = 20$. Т.к. $7a \le 20$, то $a = 1$ или $a = 2$. Если $a = 1$, тогда синих карандашей 6, а красных 13. Но $13 > 6$, т.е. этот случай не подходит. Если $a = 2$, то синих 12, а красных 6. Этот случай подходит.

$\boxed{3}$ **Ответ:** Воскресеньем.

Решение. Ясно, что если январь начинался с субботы, воскресенья или понедельника, то в нем хотя бы 5 понедельников. Аналогично, если он начинался со среды, четверга или пятницы, то в нем хотя бы 5 пятниц. Значит, этот январь начинался со вторника. Тогда, 22-е вторник, а 20-е воскресенье.

$\boxed{4}$ **Ответ:**



Решение. Будем называть *доминошкой* $a|b$ доминошку, у которой на одной половинке a точек, а на другой — b.

Предположим, что первая доминошка вертикальная. Тогда доминошка $0|4$ уже использована. Но при любом дальнейшем разбиении оставшаяся половинка с четырьмя точками образует вторую доминошку $0|4$, чего не может быть.

Значит, первые две доминошки горизонтальные. Но тогда последние две доминошки не могут быть горизонтальными (иначе получится сразу две пары совпадающих доминошек), значит, последняя доминошка вертикальная. Тогда предпоследняя доминошка не может быть вертикальной, т.к. 0|4 уже использована. Т.е. две предпоследние горизонтальные. Т.к. доминошка 0|1 уже использована, получаем разбиение, как в ответе.

$\boxed{5}$ **Ответ:** Всего 27 четверок: $(1,1,1,12)$, $(1,1,2,11)$, $(1,1,3,10)$, $(1,1,4,9)$, $(1,1,5,8)$, $(1,1,6,7)$, $(1,2,2,10)$, $(1,2,3,9)$, $(1,2,4,8)$, $(1,2,5,7)$, $(1,2,6,6)$, $(1,3,3,8)$, $(1,3,4,7)$, $(1,3,5,6)$, $(1,4,4,6)$, $(1,4,5,5)$, $(2,2,2,9)$, $(2,2,3,8)$, $(2,2,4,7)$, $(2,2,5,6)$, $(2,3,3,7)$, $(2,3,4,6)$, $(2,3,5,5)$, $(2,4,4,5)$, $(3,3,3,6)$, $(3,3,4,5)$, $(3,4,4,4)$.

$\boxed{6}$ **Ответ:** 6, 44.

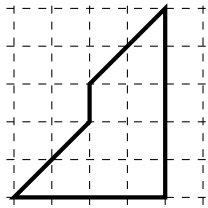
$\boxed{7}$ **Ответ:** В этом предложении цифра 0 встречается 1 раз, цифра 1 — 11 раз, цифра 2 — 2 раза, цифра 3 — 1 раза, цифра 4 — 1 раз, цифра 5 — 1 раз, цифра 6 — 1 раз, цифра 7 — 1 раза, цифра 8 — 1 раз, цифра 9 — 1 раз.

$\boxed{8}$ **Ответ:**

а(1)		д(7)	т(8)	ч(9)	з(10)	у(11)	
р(2)	и(5)	щ(6)			п(13)	к(12)	
ю(3)	й(4)			ж(15)	е(14)		
		л(18)	ц(17)	ь(16)			
		б(19)	ш(20)	г(21)	ъ(22)	ф(23)	
				н(26)	э(25)	с(24)	
			о(28)	ы(27)			
			в(29)	ё(30)	м(31)	х(32)	я(33)

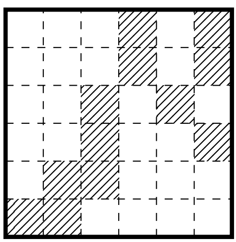
Листок 16. Разрезания – II

$\boxed{\mathbf{1}}$ Разрежьте нарисованную фигуру на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

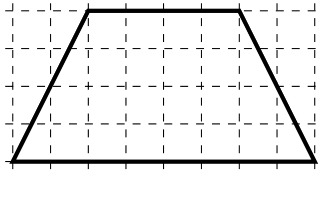


$\boxed{\mathbf{2}}$ На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Разрежьте изображенную на рисунке доску на 4 одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала ровно 3 закрашенные клетки.

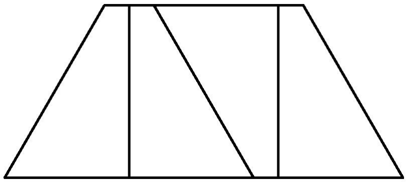


$\boxed{\mathbf{4}}$ Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.

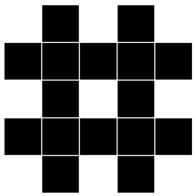


$\boxed{\mathbf{5}}$ Пару доминошек 1×2 назовём *гармоничной*, если они образуют квадрат 2×2. Существует ли разбиение доски 8×8 на доминошки, в котором ровно одна *гармоничная* пара?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Четырехугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2, две из которых параллельны, разбит на четыре одинаковые фигуры. В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найти отношение длины большего отрезка к меньшему.



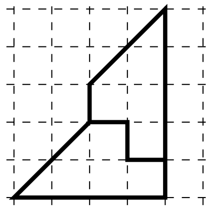
$\boxed{\mathbf{7}}$ Разрежьте по клеточкам на 4 части фигуру, изображённую на рисунке, и сложите из них квадрат.



$\boxed{\mathbf{8}}$ **а)** Можно ли шахматную доску разрезать на доминошки 1×2?
б) А если из шахматной доски вырезали одну угловую клетку, то получится разрезать?
в) А если вырезали две клетки: левую нижнюю и левую верхнюю?
г) А если левую нижнюю и правую верхнюю?

Ответы и решения

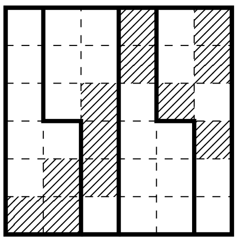
$\boxed{1}$ **Решение.**



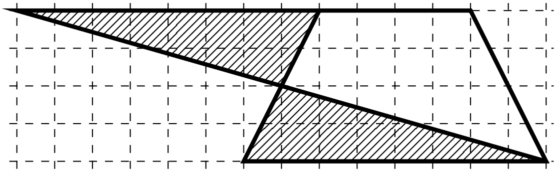
$\boxed{2}$ **Ответ:** 432.

Решение. Сначала проведем только меридианы. Область между двумя соседними меридианами назовем *долькой*. Пока глобус разбит на 24 дольки. 17 параллелей делят каждую дольку на 18 частей. Т.е. всего частей $24 \cdot 18 = 432$.

$\boxed{3}$ **Решение.**

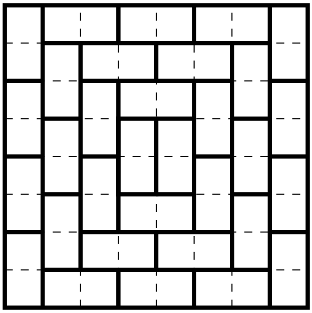


$\boxed{4}$ **Решение.**



$\boxed{5}$ **Ответ:** да, существует.

Решение.



$\boxed{6}$ **Ответ:** 5.

Решение. Заметим, что нижняя сторона в два раза больше верхней. Верхнюю сторону можно составить из трех маленьких и одного большого отрезка, нижнюю — из трех больших и одного маленького. Тогда

$$6 \text{ маленьких} + 2 \text{ больших} = 3 \text{ больших} + 1 \text{ маленький}.$$

Тогда маленький в 5 раз меньше большого.

$\boxed{7}$ **Решение.**

$\boxed{8}$ **а) Ответ:** да, можно.

Решение. Шахматную доску можно разрезать на 8 полосок 1×8, а каждую такую полоску на 4 доминошки.

б) Ответ: нет, не получится.

Решение. Каждая доминошка занимает 2 клетки. Т.е. если фигуру можно разрезать на доминошки, то в ней четное число клеток. Но $8 \cdot 8 - 1 = 63$ нечетно.

в) Ответ: да.

Решение. Эту доску можно разбить на одну полоску 1×6 и 7 полосок 1×8. Каждую из них можно разрезать на доминошки.

г) Ответ: нет.

Решение. Пусть поля этой доски покрашены, как в шахматах. Заметим, что вырезанные поля одного цвета. Любая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетку. Т.е. при разбиении фигуры на доминошки количество белых и черных клеток должно быть одинаково. Но клеток одного цвета 30, а другого 32.

Листок 17. Взвешивания

Во всех задачах сегодняшнего занятия речь идёт о чашечных весах. У них две чашки, и при взвешивании перевешивает та чашка, на которой груз тяжелее.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Есть три монеты. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью одного взвешивания определить фальшивую монету?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Есть девять монет. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью двух взвешиваний определить фальшивую монету?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ Имеются четыре гири. Одна из них большая и тяжелая, вторая поменьше и полегче, третья — еще меньше и еще легче, а четвертая — самая маленькая и самая легкая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждый раз берется любая из гирь и ставится на любую чашку весов). Можно ли, не зная точного веса гирь, положить по одной их все на весы в таком порядке, чтобы сначала три раза перевешивала левая чашка, а последний раз — правая?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Есть 5 монет. Из них три настоящие, одна — фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна — фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В 9 мешках лежат настоящие монеты (по 10 г), а в одном — фальшивые (11 г). Одним взвешиванием на двухчашечных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивые монеты. (Стрелка показывает, на сколько масса монет на «тяжёлой» чашке больше, чем на «лёгкой».)

$\boxed{\mathbf{7}}$ Имеются 64 монеты, все разные по весу. За не более, чем 94 взвешивания, определите самую лёгкую и самую тяжёлую монеты.

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Решение.** Положим на каждую чашу по монете. Если весы находятся в равновесии, то фальшивая монета — это третья, если же какая-то чаша оказалась легче, то на ней и лежит фальшивая монета.

$\boxed{2}$ **Решение.** Положим на каждую чашу по три монеты. За первое взвешивание можно узнать в какой группе из трех монет находится фальшивая. А из трех монет за одно взвешивание находить фальшивую мы научились в предыдущей задаче.

$\boxed{3}$ **Решение.** Положим на каждую чашу по 50 монет. Если чаши будут весить одинаково, то оставшаяся монета фальшивая, а монеты, которые лежат на чашах, настоящие. Чтобы узнать, тяжелее или легче весит фальшивая настоящей, достаточно сравнить ее с любой настоящей монетой.

Если же одна из чаш весит больше другой, то возьмем ее и разобьем на две кучки по 25 монет. Если они весят одинаково, то фальшивая монета была на другой чаше, значит, фальшивая легче. Если же одна из чаш перевесит, то фальшивая монета была в этих 50, т.е. фальшивая тяжелее.

$\boxed{4}$ **Решение.** Пусть самая тяжелая гиря — A, вторая — B, третья — C и четвертая — D. Сначала положим на левую чашу гирю B. Левая чаша перевесит. Затем добавим к не гирю D. Левая чаша опять перевесит. Теперь положим на правую чашу гирю C. Т.к. B весит больше C, то левая снова перевесит. Теперь поставим гирю A на правую чашу. Т.к. $A > B$ и $C > D$, правая чаша перевесит.

$\boxed{5}$ **Решение.** Первым взвешиванием сравним веса первых двух монет. Вторым — веса третей и четвертой.

Покажем, что если в обоих взвешиваниях одна из чаш перевешивала, то за оставшееся взвешивание можно установить фальшивые монеты. Действительно, тяжелая монета не может лежать на легкой чашке, а легкая на тяжелой. Также тяжелая и легкая монеты не могли участвовать в одном взвешивании. Значит, в одном взвешивании участвовали тяжелая и настоящая, а в другом — настоящая и легкая. Т.е. оставшаяся монета настоящая. Остается сравнить ее с монетой с тяжелой чаши, например, в первом взвешивании.

Очевидно, в обоих взвешиваниях чаши не могли находиться в равновесии.

Если же в одном из взвешиваний чаши находились в равновесии, то на ней лежали две настоящие монеты. Теперь взвесим настоящую и оставшуюся. Мы можем узнать тип этой монеты. А далее узнаем тип монет на чашах, находившихся в одном из первых двух взвешиваний не в равновесии.

$\boxed{6}$ **Решение.** Пронумеруем мешки числами от 1 до 10. Из i-го мешка возьмем i монет и положим на левую чашку. Ясно, что если бы все монеты были настоящими, то левая чаша была бы на 550 г тяжелее правой. А так она будет тяжелее правой на $550 + i$ г, где i — номер мешка, из которого взяты фальшивые монеты.

$\boxed{7}$ **Решение.** Разобьем все монеты на 32 пары монет. Далее найдем в каждой паре легкую и тяжелую монету(это делается за одно взвешивание). Очевидно, что самая легкая монета будет среди легких, а самая тяжелая среди тяжелых. Действительно, самая легкая монета легче любой другой, а, значит, в своей паре она будет легкой. Аналогично с тяжелыми.

У нас осталось $94 - 32 = 62$ взвешивания.

Теперь возьмем все «легкие» монеты. Покажем, как за 31 взвешивание определить среди них самую легкую монету. Сначала положим на каждую чашу по монете. А далее будем повторять следующую операцию: после взвешивания будем убирать тяжелую монету, и класть вместо нее любую монету, которая еще не участвовала во взвешиваниях. Ясно, что всего будет проведено 31 взвешивание. А монета, которая останется на весах и будет самой легкой.

Аналогично за 31 взвешивание определим самую тяжелую монету.

Листок 18. Про время

1 В 4 часа дня с первого до последнего удара часов прошло 6 секунд. Сколько времени пройдет с первого до последнего удара в полдень?

2 На часах, которые ходят точно, оторвались все цифры. Остались только деления без подписей. Как узнать, куда нужно вернуть каждую цифру? (Других часов у вас нет.)

3 Катя на выполнение домашнего задания тратит на 10% больше времени, чем Лена. А Маша тратит на 10% меньше времени, чем Катя. Кто из девочек быстрее всего делает домашнее задание?

4 Водитель дальнобойного грузовика взглянул на приборы своей машины и увидел, что спидометр показывает 25952. «Какое красивое число я проехал. Наверное, не скоро выпадет следующее красивое число», — подумал он. Однако через час двадцать минут на спидометре высветилось следующее красивое число. С какой скоростью ехал грузовик?

5 Есть двое песочных часов: на 5 минут и на 8 минут. Как можно с их помощью засечь 7 минут?

6 Разрежьте циферблат на две части так, чтобы **а)** сумма чисел в каждой части была одинаковой; **б)** сумма цифр в каждой части была одинаковой.

7 Сколько раз в сутки стрелки часов образуют прямой угол?

8 Петин будильник испорчен: он спешит на 4 минуты в час. В 7 часов вечера Петя установил на нем точное время и поставил звонок на 7 часов утра. Во сколько Петя проснётся?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** 22 секунды.

Решение. В 4 часа дня часы пробили четыре раза. Значит, между любыми двумя ударами проходит $6/3 = 2$ секунды. (Между 4 ударами часов есть 3 промежутка.) Тогда в 12 часов между первым и последним ударом есть 11 промежутков по 2 секунды, а значит, между ними пройдет 22 секунды.

$\boxed{2}$ **Решение.** За 12 часов маленькая стрелка проходит полный круг. За это время она несколько раз совпадает с минутной. Но только один раз это происходит, когда и минутная, и часовая стрелки показывают на одно и то же деление. Это происходит в 12 часов. Таким образом, можно узнать какое из отмеченных делений соответствует 12. Остальные цифры нужно прикреплять последовательно по ходу часовой стрелки.

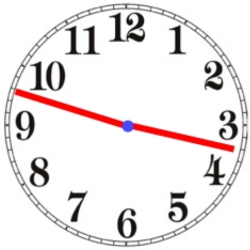
$\boxed{3}$ **Ответ:** Маша.

Решение. Заметим, что т.к. Катино время больше, чем Ленино, то и 10% от Катиного больше 10% от Лениного. Значит, Маша тратит времени меньше Лены. Значит, она тратит меньше всего.

$\boxed{4}$ **Ответ:** $82,5$ км/ч. **Решение.** Красивых пятизначных чисел, начинающихся на 25 больше нет. Т.е. следующее число начинается на 26 (такое хотя бы одно есть, например, 26062). Заметим, что задав первые две цифры красивого числа, мы задали и две последние: $26X62$. Осталось выбрать минимально возможную третью цифру — это 0. Значит, за час двадцать минут он проехал $26062 - 25952 = 110$ км. Значит, его скорость равна $\dfrac{110}{4/3} = 82,5$ км/ч.

$\boxed{5}$ **Решение.** Одновременно переворачиваем и те, и другие часы. Когда в 5-минутных часах песок полностью окажется в нижней части, перевернем их еще раз. Через 3 минуты песок полностью будет в нижней части в 8-минутных часах. В этот момент начинаем отмерять 7 минут. Через две минуты весь песок будет внизу в 5-минутных часах. Переворачиваем их, и когда он пересыпется еще раз, пройдет ровно $2 + 5 = 7$ минут с того момента, как мы стали засекать время.

$\boxed{6}$ **а) Ответ:** см. рис.



б) Решение. Так разрезать невозможно. Если бы так разрезать удалось, то суммы цифр в каждой из частей были бы равны, а, значит, сумма всех цифр была бы четной. Убедимся, что это не так:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) = 45 + 1 + 2 + 3 = 51$ — нечетное число.

$\boxed{7}$ **Ответ:** 44.

Решение. В сутки часовая стрелка делает 2 оборота, а минутная — 24. Т.к. минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образует по два прямых угла, то ответ — 44.

$\boxed{8}$ **Ответ:** В 6 часов 15 минут.

Решение. Пусть у нас есть правильные часы и такие же часы, как у Пети. Будем отмерять время и по тем, и по другим. Если с 7 часов вечера до того момента, когда зазвенел будильник, пройдет x часов (или $60x$ минут), если отмерять по правильным часам, то по петиным часам пройдет $64x$ минут. Так как будильник зазвенит, когда петины часы будут показывать 7 часов утра, то по этим часам с 7 вечера прошло $12 \cdot 60 = 720$ минут. То есть, $64x = 720$. Тогда $x = 720/64 = 45/4$. Значит, от 7 часов вечера до того момента, когда зазвенит будильник, пройдет $45/4$ часа или 11 часов 15 минут. Легко посчитать, что будильник зазвенит в 6 часов 15 минут.

Листок 19. Разные задачи

1 У Кости есть 10 палочек длиной 50 см. Он хочет распилить их так, чтобы получилось 50 палочек длиной 10 см. Сколько распилов ему придется сделать?

2 Денежной единицей коротышек является фертинг. Можно ли с помощью десяти купюр номиналом в 1 и 5 фертингов отсчитать сумму в 31 фертинг?

3 В квадрате 7×7 закрасьте несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно три закрашенные клетки.

4 У скольких трёхзначных чисел средней цифрой является 0?

5 На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) в некоторой компании каждый заявил остальным: «Среди вас — два рыцаря». Сколько рыцарей могло быть в этой компании?

6 В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы имеют одинаковую цену, а разные — разную. Известно, что слово ONE стоит $6, слово TWO стоит $9, а слово ELEVEN стоит $16. Сколько стоит слово TWELVE?

7 Сеня взял в долг у Гоши 19 рублей, обязуясь вернуть их в течение 4 месяцев. Причём каждый месяц сумма выплаты должна расти, составлять целое число рублей и нацело делиться на сумму выплаты в предыдущем месяце. Какую сумму выплатит Сеня в последний месяц?

8 Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют точный квадрат.

Ответы и решения

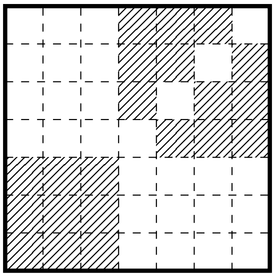
$\boxed{1}$ **Ответ:** 40.

Решение. Для этого нужно каждую палочку разделить на 5 частей по 10 см. Т.е. на каждой палочке сделать 4 распила. Тогда всего распилов будет $4 \cdot 10 = 40$.

$\boxed{2}$ **Ответ:** нет, нельзя.

Решение. 1 и 5 — нечетные числа. Сумма десяти нечетных чисел четна. Значит, 31 фертинг отсчитать не удастся.

$\boxed{3}$ **Решение.**



$\boxed{4}$ **Ответ:** у 90.

Решение. Первой цифрой может быть любая от 1 до 9 (всего 9), а последней — любая от 0 до 9 (всего 10). Значит, таких чисел $9 \cdot 10 = 90$.

$\boxed{5}$ **Ответ:** 3 или 0.

Решение. Предположим, что был хотя бы один рыцарь. Тогда, кроме него, должно быть еще ровно два рыцаря. Всего будет три рыцаря. Ясно, что компания, в которой ровно 3 рыцаря и любое количество лжецов удовлетворяет условию.

Пусть не было рыцарей. Нетрудно видеть, что компания из одних лжецов также удовлетворяет условию.

$\boxed{6}$ **Ответ:** \$19.

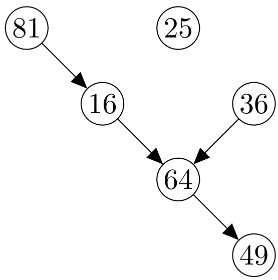
Решение. Возьмем два слова `ELEVEN` и `TWO`. Заберем из этих букв одну букву `O`, одну `N` и одну `E`. Тогда из оставшихся букв можно сложить слово `TWELVE`. Значит, оно стоит $16 + 9 - 6 = 19$ долларов.

$\boxed{7}$ **Ответ:** 12 рублей.

Решение. Заметим, что если в текущем месяце Сеня выплатил x рублей, то в следующем месяце Сеня выплатит хотя бы $2x$ рублей. Таким образом, если в первый месяц Сеня выплатил x рублей, то всего он выплатит не менее $x+2x+4x+8x = 15x$ рублей. Т.к. $15x \leq 19$, то $x = 1$. Пусть во втором месяце Сеня выплатил y рублей. Тогда всего он выплатит не менее $1+y+2y+4y = 1+7y$ рублей. $7y+1 \leq 19$ и $y > 1$, значит, $y = 2$. Если в третьем месяце Сеня выплатит не менее 6 рублей, то в последнем не меньше 12, но $12 + 6 + 2 + 1 = 21 > 19$. Значит, в третьем месяце Сеня выплатил 4 рубля. Тогда в последний месяц Сеня выплатил $19 - 1 - 2 - 4 = 12$ рублей.

$\boxed{8}$ **Ответ:** 81649.

Решение. Заметим, что в этом числе нет нулей, т.к. нет точного квадрата из двух цифр, оканчивающегося на ноль. Тогда оставшихся возможных вариантов соседних цифр, образующих квадрат, всего 6: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Будем соединять числа $\overline{ab}$ и $\overline{bc}$ стрелкой, если после $\overline{ab}$ можно дописать c, не нарушив условие задачи, т.е. $\overline{bc}$ — точный квадрат. Тогда любой путь по стрелкам — число, удовлетворяющее условию задачи. Длина максимального пути — 3, причем такой путь один. Пройдя по этому пути, получим наибольшее число — 81649.



Листок 20. Идущие порознь

$\boxed{\mathbf{1}}$ Винни-Пух и Пятачок вышли из своих домиков навстречу друг другу и встретились через 2 минуты. Через какое время Пятачок придет к дому Пуха, если скорость Винни-Пуха в два раза больше скорости Пятачка?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Винни-Пух вышел из гостей от Кристофера Робина на 1 минуту позже Пятачка. Через какое время он догонит Пятачка, если его скорость в два раза больше скорости Пятачка?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Тигра и Винни-Пух пошли в гости к Кристоферу Робину. Сначала Тигра побежал в два раза быстрее Винни-Пуха, но, пробежав половину дороги, неожиданно утомился и оставшийся путь прополз со скоростью в два раза меньшей скорости Винни-Пуха. Кто раньше встретился с Кристофером Робином — Тигра или Винни-Пух?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Тигра умеет бегать со скоростью 30 километров в час и очень хочет научиться тратить на каждый километр на одну минуту меньше. С какой скоростью нужно научиться бегать Тигре?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Упрямый Винни-Пух решил дойти пешком до Северного полюса. В 12 часов его нагнал Кристофер Робин на велосипеде и подвёз до того места, откуда до Северного полюса оставалось столько же, сколько Винни уже прошёл пешком. На Северном полюсе Винни-Пух был в 14 часов. Сколько времени потребуется Винни-Пуху на обратный путь пешком, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью вдвое большей, чем он ходит пешком?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Юля и Таня делали уроки. Каждая из них начала с математики, затем выучила стихотворение, следом прочитала текст на английском языке и, наконец, выполнила упражнение по русскому языку. На каждый предмет у Юли уходило в два раза меньше времени, чем на предыдущий, а у Тани — в 4 раза меньше времени, чем на предыдущий. Начали и закончили они одновременно. Что делала Таня, когда Юля взялась за русский язык?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Двое бегут с разной скоростью вниз по эскалатору метро. Кто из них насчитает больше ступенек — кто бежит быстрее, или кто бежит медленнее?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Однажды улитка заползла на вершину бамбука, который растет так, что каждая его точка поднимается вверх с одной и той же скоростью. Путь вверх занял у улитки 7 часов. Отдохнув на вершине бамбука ровно час, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука (обе скорости постоянны)?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** через 4 минуты.

Решение. Путь от места их встречи до дома Пуха Пух прошел за 2 минуты. А т.к. скорость Пятачка в два раза меньше, то он пройдет этот путь за 4 минуты.

$\boxed{2}$ **Ответ:** через 1 минуту.

Решение. За одну минуту Пух проходит то же расстояние, что и Пятачок за 2 минуты. Значит, он догонит Пятачка через минуту.

$\boxed{3}$ **Ответ:** Винни-Пух.

Решение. Когда Тигра пробежит половину пути, Пух пройдет только четверть. Затем Пуху останется пройти три четверти пути. За это время Тигра проползет только 3/8 пути, что меньше половины. Т.е. Пух придет раньше.

$\boxed{4}$ **Ответ:** 60 км/ч.

Решение. Т.к. Тигра тратит на каждые 30 километров 60 минут, то на каждый километр он тратит 2 минуты. Если он будет тратить на каждый километр на одну минуту меньше, то будет бегать со скоростью 1 км/мин, или 60 км/ч.

$\boxed{5}$ **Ответ:** 4 часа.

Решение. Пусть S — место, с которого начал свой путь Пух, K — место, где он встретился с Кристофером Робином, L — место, с которого он снова пошел пешком, N — Северный полюс. На обратном пути Пуху надо пройти путь $NS = NL + LK + KS = 2NL + LK$. При этом за 2 часа Пух проходит отрезок LS и проезжает отрезок KL. Значит, за 4 часа он проходит отрезок KL и два отрезка $LS = NL$. Т.е. путь NS он пройдет за 4 часа.

$\boxed{6}$ **Ответ:** учила стихотворение.

Решение. Пусть Юля делала русский x минут, а Таня — y минут. Тогда на оставшиеся предметы они потратили: Юля $x + 2x + 4x + 8x = 15x$ минут, а Таня $y + 4y + 16y + 64y = 85y$ минут. Т.к. начали и закончили они одновременно, то $85y = 15x$. Значит, $x = \frac{17}{3}y$. Но тогда Юля начал делать русский через $A = 14 \cdot \dfrac{17}{3}y = \dfrac{238}{3}y = 79\frac{1}{3}y$ минут. Т.к. Таня начала учить стихотворение через $64y < A$ минут, а закончила через $80y > A$ минут, то когда Юля взялась за русский язык, Таня учила стихотворение.

$\boxed{7}$ **Ответ:** тот, кто быстрее.

Решение. Насчитает ступенек больше тот, кто пробежит по самому эскалатору большее расстояние. А пробежит тот, кто бежит быстрее.

$\boxed{8}$ **Ответ:** в 9 раз.

Решение. Всего улитка провела на бамбуке $7 + 1 + 8 = 16$ часов. Пусть, поднимаясь вверх, улитка проползла расстояние равное x, а за 1 час отдыха и 8 часов спуска улитки бамбук подрос на y. Тогда, спускаясь вниз, улитка проползла $x + y$. Составим выражения для определения скорости улитки при движении вверх по бамбуку: $\frac{x}{7}$; и при спуске: $\frac{x+y}{8}$. Получим, что $\frac{x}{7} = \frac{x+y}{8}$, т.е. $8x = 7x + 7y$, или $x = 7y$.

Так как бамбук подрос на y за 9 часов, скорость его роста равна $y/9$. Выполняя деление последнего равенства на 7, получим, что $x/7 = 7y/7$, откуда $x/7 = 9 \cdot \frac{y}{9}$.

Значит, скорость роста бамбука в 9 раз меньше скорости улитки.

Листок 21. Разные задачи – II

$\boxed{\mathbf{1}}$ Что больше: $\dfrac{2009}{2010}$ или $\dfrac{2010}{2011}$?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Напишите, используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4 ровно два раза, восьмизначное число, у которого между единицами стоит ровно 1 цифра, между двойками — ровно 2 цифры, между тройками — ровно 3 и между четверками — ровно 4 цифры.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Миша, Антон и Стёпа решали задачки. Миша сказал: «Я решил больше всех задач». Антон усомнился: «Либо ты решил не больше всех, либо Стёпа меньше всех». Стёпа сказал: «Я решил больше задач, чем Антон». Кто решил больше всех задач, если прав только один из мальчиков? Ответ объясните.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Денежной единицей коротышек является фертинг. В данный момент 1 фертинг стоит 3 руб. 55 коп. Сколько фертингов стоит 1 рубль? (Фертинг разменивается на 100 сантиков, при нецелом числе сантиков округление происходит в большую сторону.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Решите ребус: ТИК+ТАК=АКТ. Буквами зашифрованы цифры. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Пятеро по очереди ели торт. Первый съел пятую его часть, второй — четверть остатка, третий — треть нового остатка, четвертый — половину того, что осталось после третьего, а пятый доел торт до конца. Кто из них съел больше всех?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В Циссильвании 1000 жителей. Трое из них — вампиры, но мало кому известно, кто именно. Заезжий писатель м-р Стокер попросил каждого жителя назвать двух человек, которые, по его мнению, являются вампирами. Каждый вампир назвал двух других вампиров, а остальные могли назвать кого угодно. Докажите, что, пользуясь данными опроса (и зная, что вампиров в Циссильвании ровно трое), м-р Стокер может выбрать себе проводника, не являющегося вампиром.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В однокруговом футбольном турнире (каждая команда с каждой сыграла ровно по одному матчу) участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие призовые места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли по итогам турнира оказаться ровно 6 ничьих? (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0)

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** $\dfrac{2010}{2011}$ больше.

Решение. Первая дробь на $\dfrac{1}{2010}$ меньше числа 1, а вторая на $\dfrac{1}{2011}$. Т.к. $\dfrac{1}{2010} > \dfrac{1}{2011}$, то вторая дробь больше.

$\boxed{2}$ **Ответ:** 23421314.

$\boxed{3}$ **Ответ:** Антон.

Решение. Рассмотрим два случая.

Если Миша прав, то он первый. Поскольку прав только один, то Стёпа неправ. Значит, второй — Антон, а Стёпа — третий. Но тогда утверждение Антона верно. Получаем, что всего было два верных высказывания, что противоречит условию задачи. Значит, этот случай невозможен.

Если Миша неправ, то он не первый. Тогда утверждение Антона верно. Получается, что утверждение Стёпы должно быть неверным. Значит, он, как и Миша, не может быть первым. Тогда Антон — первый. Нетрудно проверить, что эта ситуация удовлетворяет условию задачи.

$\boxed{4}$ **Ответ:** 28 сантиков.

Решение. Тогда рубль стоит $\dfrac{1}{3,55} = 0,281\ldots$ фертингов.

$\boxed{5}$ **Ответ:** 216+246=462, 261+251=512, 432+492=924.

Решение. Заметим, что Т — четное, так как оно равно последней цифре суммы (К+К). С другой стороны, Т$\leq$ 4, так как иначе АКТ не может быть трёхзначным числом. Таким образом, Т=2 или Т=4.

Если Т=2, то К=1 или К=6. В первом случае, нетрудно проверить, что А=5, а И=6. Во втором случае, А=4 (тогда И=1) или А=5 (тогда И не может быть однозначным числом — противоречие).

Если Т=4, то К=2 или К=7. В первом случае, А=9, а И=3. А второй случай, как нетрудно проверить, к решению не приводит.

$\boxed{6}$ **Ответ:** все съели поровну.

Решение. Первый съел $\frac{1}{5}$. Осталось $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Второй съел $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$. Осталось $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Третий съел $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$. Осталось $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$.

Четвертый съел $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Осталось $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. Пятый съел $\frac{1}{5}$.

Таким образом, все съели поровну.

$\boxed{7}$ **Решение.** Известно, что все вампиры указали друг на друга. Значит, они образуют тройку, внутри которой каждый показывает на двух других. Любой житель может входить не более, чем в одну такую тройку. Все жители не могут разбиться на такие тройки, так как их количество не делится на 3. Поэтому найдётся житель, не вошедший в такую тройку. Значит, он не является вампиром.

$\boxed{8}$ **Ответ:** нет, не могло.

Решение. Всего игр было сыграно $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Если всего было 6 ничьих, то всего команды набрали $(21 - 6) \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 45 + 12 = 57$ очков. Но тогда первые три команды набрали $57/2 = 28.5$ очков, чего не может быть.

Листок 22. Составление уравнений

$\boxed{\mathbf{1}}$ Решите уравнение $(x : 2 - 3) : 2 - 1 = 3$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Деду 56 лет, внуку — 14. Через сколько лет дедушка будет вдвое старше внука?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Упаковка чая на 50 копеек дороже пакета кофе. Вася купил 7 упаковок чая и 6 пакетов кофе, потратив 68 рублей 50 копеек. Сколько стоит пакет кофе?

$\boxed{\mathbf{4}}$ 9 одинаковых тетрадок стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же тетрадок — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна тетрадка?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Представьте число 45 в виде суммы четырёх чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 из второго, умножения на 2 третьего и деления на 2 четвёртого эти числа станут равными.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются.)

$\boxed{\mathbf{8}}$ Ваня 28 ноября сказал: «Сегодня разность между числом прожитых мною полных месяцев и числом полных лет впервые стала равна 144». Когда у Вани День рождения?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** 22.
Решение. Делаем всё в обратном порядке:

$$(x : 2 - 3) : 2 - 1 = 3$$

$$(x : 2 - 3) : 2 = 4$$

$$x : 2 - 3 = 8$$

$$x : 2 = 11$$

$$x = 22.$$

$\boxed{2}$ **Ответ:** через 28 лет.
Решение. Пусть это произойдёт через x лет. Тогда

$$56 + x = 2 \cdot (14 + x)$$

$$56 + x = 28 + 2x$$

$$28 = x.$$

$\boxed{3}$ **Ответ:** 5 рублей.
Решение. Пусть пакет кофе стоит x рублей, тогда упаковка чая стоит $x + 0,5$. Значит,

$$7 \cdot (x + 0,5) + 6x = 68,5$$

$$7x + 3,5 + 6x = 68,5$$

$$13x = 65$$

$$x = 5.$$

$\boxed{4}$ **Ответ:** 1 руб. 23 коп.
Решение. Обозначим за x рублей цену одной тетрадки. Тогда условие задачи можно переписать так:

$$11 < 9x < 12, \qquad 15 < 13x < 16.$$

Из левого неравенства первого соотношения следует, что

$$1,222\ldots < x,$$

а из правого неравенства второго соотношения

$$x < 1,230... < 1,24.$$

Значит, тетрадка стоит больше, чем 1 руб. 22 коп., и меньше, чем 1 руб. 24 коп. Единственно возможный вариант 1 руб. 23 коп.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **Ответ:** $8 + 12 + 5 + 20 = 45$.

Решение. Пусть в итоге все числа стали равны x.

Тогда изначально числа были равны $x - 2$, $x + 2$, $0,5x$, $2x$. Получается, что

$$x - 2 + x + 2 + 0,5x + 2x = 45$$

$$4,5x = 45$$

$$x = 10.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ **Ответ:** 8 орехов.

Решение. Обозначим количество орехов в ящиках x, y, z соответственно. Тогда получаем, что

$$x + 6 = y + z, \quad y + 10 = x + z.$$

Сложим эти два равенства

$$x + y + 16 = x + y + 2z$$

$$16 = 2z$$

$$z = 8.$$

Значит, в третьем ящике 8 орехов.

$\boxed{\mathbf{7}}$ **Ответ:** в каждого попало по 1 снежку.

Решение. Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали x, y и z снежков соответственно, то всего было брошено $13 + x + y + z$ снежков (поскольку 13 снежков не достигли цели). С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль — $5y$, а Тофсла — $(4z + 1)$ снежков (вместе с первым). Получаем уравнение

$$6x + 5y + 4z + 1 = 13 + x + y + z$$

$$5x + 4y + 3z = 12$$

Так как x, y, z — целые неотрицательные числа, то x может быть равен 1 или 2, y — 1, 2 или 3, z — 1, 2, 3 или 4. Перебором находим единственное решение $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

$\boxed{8}$ **Ответ:** 28 октября.

Решение. Пусть с того момента, как Ваня родился, до 28 ноября этого года прошло x лет и ещё y месяцев (y от 0 до 11). Значит, полных месяцев всего прошло $12x + y$. Тогда

$$12x + y - x = 144$$

$$11x + y = 144$$

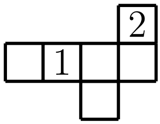
$$11x = 144 - y$$

Значит, $144 - y$ делится на 11. Но единственное подходящее из возможных y равно 1. Получается, что День рождения у Вани за 1 месяц до 28 ноября, то есть, 28 октября.

Листок 23. Геометрические конструкции

1 У двух человек было два квадратных торта. Каждый сделал на своём торте по два прямолинейных разреза от края до края. При этом у одного получилось три куска, а у другого — четыре. Могло ли такое быть?

2 На рисунке изображена развертка кубика. На ней проставлены только числа: 1 и 2. Расставьте остальные числа: 3, 4, 5, 6 — так, чтобы сумма чисел на любых двух противоположных гранях была равна 7.



3 Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая была соединена ровно с четырьмя другими?

4 Верно ли, что среди любых пяти отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

5 Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?

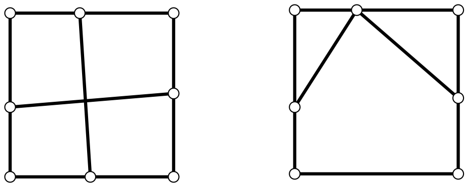
6 Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых 6 нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)

7 Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата Можно ли каждый из получившихся квадратов покрасить в один из трёх цветов так, чтобы любые два квадрата, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета?

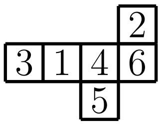
$\boxed{\mathbf{8}}$ На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером 2×6. Можно ли раскрасить узлы клеток, лежащие на границе и внутри этого прямоугольника (всего их 21), в два цвета так, чтобы никакие четыре одноцветных узла не оказались в вершинах прямоугольника со сторонами, идущими вдоль линий сетки?

Ответы и решения

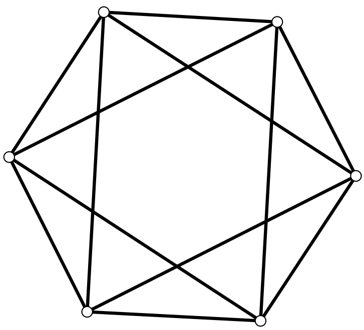
$\boxed{1}$ **Ответ:** да, могло.
Решение.



$\boxed{2}$ **Решение.**



$\boxed{3}$ **Ответ:** да, можно.
Решение.

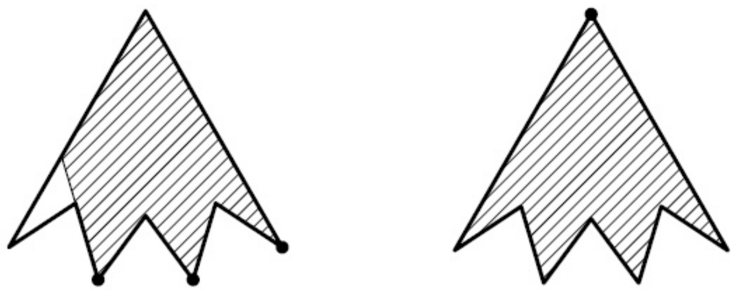


$\boxed{4}$ **Ответ:** нет, не верно.

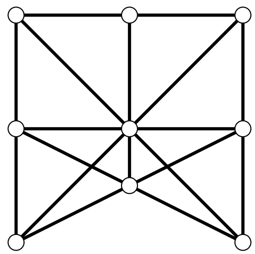
Решение. Пусть отрезки имеют длины 1, 2, 4, 8, 16. Нетрудно видеть, что для любых трех отрезков $a < b < c$ верно, что $a + b < c$. Значит, треугольник составить не удастся.

$\boxed{5}$ **Ответ:** да, могло.

Решение. Пример см. на рис. Лампочки обозначены кружочками.



$\boxed{6}$ **Решение.**



Далее несложным перебором легко показать, что данная конфигурация удовлетворяет условию.

$\boxed{7}$ **Ответ:** да, можно.

Решение.

		3	2				
		2	3				
1	3	1	2	1	3	1	2
3	1	2	1	3	1	2	1
		3	2				
		2	3				

$\boxed{8}$ **Ответ:** нет, нельзя.

Решение. Разобьем прямоугольник из условия на 7 троек из 3 вертикальных точек. Заметим, что если какие-то две тройки совпадают, то найдется искомый прямоугольник, т.к. в каждой тройке одного из двух цветов хотя бы 2 точки. Всего таких комбинаций $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Осталось заметить, что если выбрана комбинация из трех точек цвета 1, то не выбраны еще хотя бы 3 тройки(в каждой из них ровно две точки цвета 1). Таким образом, найдутся две одинаковые тройки.

Листок 24. Принцип крайнего

$\boxed{\textbf{1}}$ По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

$\boxed{\textbf{2}}$ По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

$\boxed{\textbf{3}}$ 8 грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

$\boxed{\textbf{4}}$ На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

$\boxed{\textbf{5}}$ В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B. Затем едет в самый далёкий от B город C и т.д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A, то путешественник никогда не вернётся обратно в город A.

$\boxed{\textbf{6}}$ В космическом пространстве летают 2011 астероидов, на каждом из которых сидит астроном. Все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

$\boxed{\textbf{7}}$ Гоша задумал четыре неотрицательных числа и посчитал их всевозможные попарные суммы (всего 6 штук). Какие числа он задумал, если эти суммы — 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Решение.** Рассмотрим наибольшее из этих чисел(или одно из них, если таких чисел несколько). Так как оно не меньше и не больше одного из своих соседей, то оно равно ему. Мы нашли пару равных чисел.

$\boxed{2}$ **Решение.** Рассмотрим наибольшее из этих чисел(или одно из них, если таких чисел несколько). Из того, что оно не меньше своих соседей и равно их среднему арифметическому, следует, что оно равно своим соседям. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что все числа равны.

$\boxed{3}$ **Решение.** Пронумеруем грибников так, чтобы первый набрал больше всех грибов, второй больше среди оставшихся и т.д. Ясно, что первый не мог набрать меньше 9 грибов, т.к. тогда бы все вместе набрали максимум $1 + \ldots + 8 = 36 < 37$ грибов. Также второй не мог набрать меньше 7 грибов. Значит, первый и второй вместе набрали хотя бы $7+9 = 16$ грибов. Учитывая то, что третий набрал хотя бы 6 грибов, то 4-й, 5-й, …, 8-й набрали вместе максимум $37 - 16 - 6 = 15 < 16$ грибов

$\boxed{4}$ **Ответ:** да, обязательно.

Решение. Рассмотрим самую верхнюю ладью, если таких несколько, то самую левую из них. Тогда выше и левее этой ладьи нет других ладей, значит, она бьет не более двух других.

$\boxed{5}$ **Решение.** Предположим, что на втором шаге путешественник не возвратился в A, т.е. город C отличен от города A. Тогда маршрут от A до B короче маршрута из B в C (поскольку C — наиболее удаленный от B город). В дальнейшем каждый следующий маршрут будет не короче предыдущего, так как каждый раз мы в качестве следующего пункта назначения выбираем наиболее удаленный город. Пусть на некотором шаге путешественник все же вернулся в город A, выйдя из некоторого города X. По доказанному, маршрут от X до A длиннее маршрута от A до B, а это противоречит тому, что B — наиболее удаленный от A город.

$\boxed{6}$ **Решение.** Рассмотрим два астероида A и B, расстояние между которыми наименьшее. Астроном на астероиде A смотрит на астероид B, а астроном на астероиде B смотрит на астероид A. Если найдется астроном, который смотрит на астероид A или B, то найдется астероид на которого никто не смотрит. В противном случае исключим из рассмотрения астероиды A и B. Получим систему из $2011 - 2 = 2009$ астероидов, для которых очевидно выполняется условие задачи. Продолжая так далее, придем к случаю трех астероидов. Выбрав, среди них два, расстояние между которыми наименьшее получим, что на оставшийся астероид никто не смотрит.

$\boxed{7}$ **Ответ:** 0, 1, 2, 4.

Решение. Пусть Гоша задумал числа $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$. Все суммы различны, поэтому самая маленькая из посчитанных сумм — $c+d$, следующая за ней — $d+b$, также самая большая — $a+b$, а следующая за ней — $a+c$.

Значит,

$$c+d=1, d+b=2, a+b=6, a+c=5.$$

Тогда $c = 1-d$, $b-c=1$, $b=c+1=2-d$, $a=5-c=4+d$.

Заметим, что $a+d=4+2d$ и $b+c=3-2d$ есть числа 3 и 4 в некотором порядке. Число d неотрицательно, значит, $a+d \geq 4$ и $b+c \leq 3$, значит, $d=0$,тогда $c=1$, $b=2$, $a=4$.

Листок 25. Клетчатые задачи

1 Можно ли в квадрате 7×7 закрасить некоторые клетки так, чтобы в любом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

2 **а)** Можно ли в клетках шахматной доски расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в любом столбце была больше 100, а в любой строке — меньше 100?

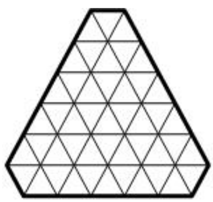
б) В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?

3 Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

4 В квадрате 7×7 закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенные клетки.

5 В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел чётна. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках будет чётна.

6 Можно ли шестиугольный торт разрезать на 23 равных куска по указанным линиям?



7 Каждая грань куба с ребром 4 см разделена на клетки со стороной 1 см. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3 так, чтобы границы полосок совпадали с границами клеток?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?

б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.

в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** да, можно.

Решение. Возьмем квадрат 8×8 и закрасим в нем клетки, стоящие на пересечении столбца и строки с четным номером. Ясно, что у этого квадрата в любом квадрате 2×2 будет ровно одна закрашенная клетка. Теперь выкинем правый столбец и верхнюю строку. Получим квадрат 7×7, удовлетворяющий условию.

$\boxed{2}$ **а) Ответ:** нет, нельзя.

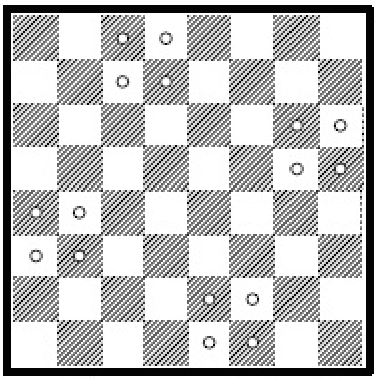
Решение. Посчитаем сумму всех чисел в таблице. Складывая по столбцам, получим, что она больше 800, а по строкам — получим, что меньше 800.

б) Ответ: нет, не может.

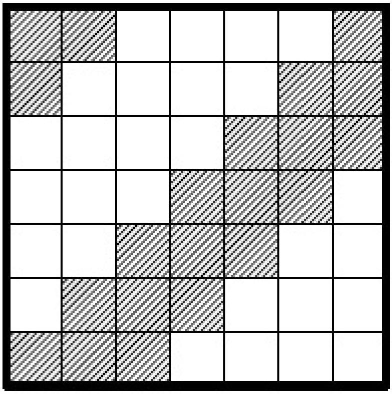
Решение. Ясно, что остаток суммы всех чисел по строкам равен остатку суммы всех чисел по столбцам и равен остатку суммы всех цифр в таблице при делении на 3. Если ровно одно из чисел не делится на 3, то суммы по строкам и по столбцам дают разные остатки, чего не может быть.

$\boxed{3}$ **Ответ:** да, можно.

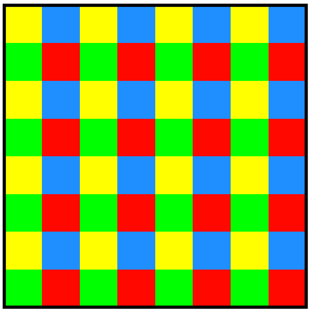
Решение.



$\boxed{4}$ **Решение.**



$\boxed{5}$ **Решение.** Покрасим доску так, как показано на рисунке.

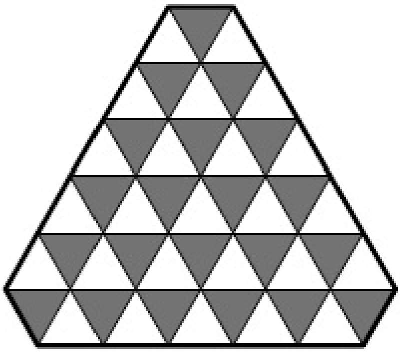


Тогда черные клетки перекрасятся в синий и зеленый цвета, а белые — в красный и желтый.

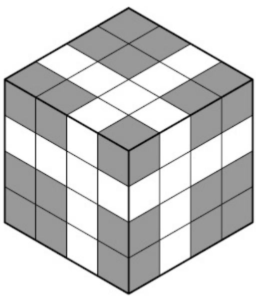
Заметим, что если сумма двух чисел четна, то эти числа одной четности. Значит, в каждом столбце и в каждой строке четность суммы цифр на белых клетках совпадает с четностью суммы на черных. Поэтому четность суммы зеленых чисел совпадает с четностью красных. А четность суммы красных совпадает с четностью суммы синих. Тогда сумма синих чисел совпадает с четностью суммы зеленых, а, значит, сумма чисел в черных клетках четна.

$\boxed{6}$ **Ответ:** нельзя.

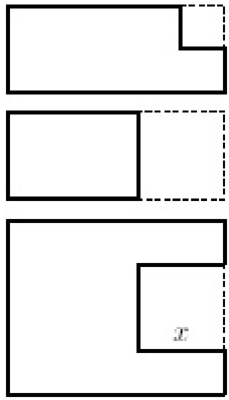
Решение. Раскрасим фигуру так, как изображено на рисунке. Если разрезание возможно, то в куске будет два треугольника: черный и белый (всего их 46), то есть черных и белых треугольников должно быть поровну. Но на рисунке черных треугольников 21, а белых — 25, следовательно, требуемое разрезание невозможно.



$\boxed{7}$ **Ответ:** нельзя.
Решение. Закрасим 27 квадратиков указанных граней так, как показано на рисунке. Тогда любая полоска 3×1 закрывает четное число закрашенных квадратиков. Поэтому заклеить данные три грани полосками так, как требуется в условии, не удастся.



$\boxed{8}$ **Ответ:** а) 2×2; б) см. рис.; в) 3×10 или 4×6.



Решение. а) Квадратик не мог иметь общий угол с прямоугольником (см. рис.), так как тогда периметр остался бы прежним или уменьшился, а площадь бы уменьшилась. Значит, квадрат примыкает только к одной из сторон прямоугольника (см. рис.). Пусть сторона квадрата x. Тогда Таня, вырезав квадрат, уменьшила площадь фигуры на x^2, при этом периметр увеличился на две стороны квадрата, то есть на $2x$. Таким образом,

исходная площадь$-x^2$ = площадь полученной фигуры,

исходный периметр$+2x$ = периметр полученной фигуры.

По условию

исходная площадь = периметр полученной фигуры,

исходный периметр = площадь полученной фигуры.

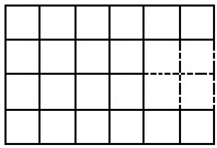
Отсюда

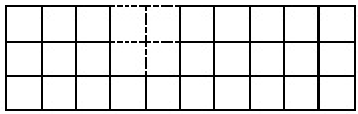
исходная площадь $-x^2$ = исходный периметр,

исходный периметр $+2x$ = исходная площадь.

Значит, $x^2 = 2x$, откуда $x = 2$.

б)





в) Пусть стороны прямоугольника m и n. Тогда из решения пункта а) следует, что $mn = 2m + 2n + 4$. Наша задача — найти все возможные пары чисел m и n, удовлетворяющие этому равенству. Равенство $mn = 2m+2n+4$ можно записать в виде $(n-2)(m-2) = 8$. Поскольку m и n превосходят 2, задача сводится к поиску разложений числа 8 на два натуральных множителя.

Листок 26. Примеры и контрпримеры

Если утверждение верно всегда, то докажите его, а если хоть в одном случае неверно, то покажите, что это за случай (приведите контрпример).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений. **а)** Все числа, делящиеся на 4 и на 6, делятся на 24. **б)** Все прямоугольники являются квадратами. **в)** Все четырехугольники, у которых все стороны равны, являются квадратами.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого можно вырезать второй. Прав ли он?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \ldots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Не хвастает ли барон?

$\boxed{\mathbf{6}}$ На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к одному из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули, сделав не более 23 ходов?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Рома придумал теорему: *Если число A является квадратом натурального числа B, а также каждая цифра числа A делится на 3, то и каждая цифра числа B делится на 3.* Верна ли ромина теорема?

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ: а)** 12; **б)** прямоугольник со сторонами 1 и 2; **в)** ромб, не являющийся квадратом.

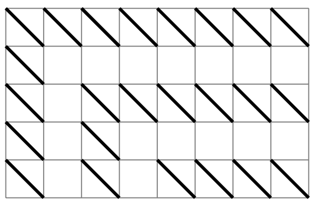
$\boxed{2}$ **Ответ:** нет, не прав.

Решение. Из прямоугольника 1×100 нельзя вырезать квадрат 2×2.

$\boxed{3}$ **Ответ:** могут.

Решение. Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червю переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.

$\boxed{4}$ **Решение.**



$\boxed{5}$ **Ответ:** нет, не хвастает.

Решение. Числа можно выписать, например, так

9.18.7.16.5.14.3.12.1.10.11.2.13.4.15.6.17.8.19

Объясним, почему нужно искать пример для $N \geq 19$. В палиндроме количество всех цифр, кроме, быть может, одной, должно быть четным. Однако если $N = 2, \ldots, 9$, то цифры 1 и 2 встречаются в записи чисел $1, 2, \ldots, N$ по одному разу, а если $N = 10, \ldots, 18$, то по 1 разу встречаются цифры 0 и 9.

$\boxed{6}$ **Ответ:** неверно.

Решение. Пусть вначале на доске написаны числа 1, 2 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Если из 9 в результате получился ноль, то вычитание производилось хотя бы девять раз. Значит, и из остальных чисел вычиталось хотя бы по девять единиц; значит, к 1 надо было сделать не меньше восьми прибавлений, а к двойке не меньше семи. Итоговое количество ходов, таким образом, не меньше $9 + 8 + 7 = 24$.

$\boxed{7}$ **Ответ:** неверна.

Решение. Например, для $B = 264, 813$. $264^2 = 69696$, $813^2 = 660969$.

Листок 27. Логика – II

$\boxed{\textbf{1}}$ Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли Петя чего-то лишнего?

$\boxed{\textbf{2}}$ Вася написал на доске натуральное число. После этого Катя и Маша сказали:
—У этого числа четная сумма цифр.
—У этого числа число нечетных цифр нечетно.
Сколько среди этих утверждений верны?

$\boxed{\textbf{3}}$ Среди 5 школьников A,B,C,D,E двое всегда лгут, а трое всегда говорят правду. Каждый из них сдавал зачет, причем все они знают, кто сдал зачет, а кто — нет. Они сделали следующие утверждения. A:«B не сдал зачет». B:«C не сдал зачет». C:«A не сдал зачет». D:«E не сдал зачет». E:«D не сдал зачет». Сколько из них зачет сдали?

$\boxed{\textbf{4}}$ В школе прошёл забег с участием 5 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый, естественно, назвал одно число от 1 до 5. Сумма их ответов оказалась равна 22. Какое наименьшее число врунишек было?

$\boxed{\textbf{5}}$ На острове живут племя рыцарей и племя лжецов. Однажды каждый житель острова заявил: «В моем племени у меня больше друзей, чем в другом». Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов?

$\boxed{\textbf{6}}$ Четырехзначное число таково, что все его цифры различны, а также известно, что числа 5860, 1674, 9432, 3017 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит в том же месте, что и в этом числе. Найдите его.

$\boxed{\textbf{7}}$ 2011 обитателей острова рыцарей и лжецов встали по кругу. Каждый из них по очереди произнес фразу: Оба мои соседа — лжецы. Если про рыцаря солгали, он обижается и становится лжецом. Если про лжеца сказали правду, он расстраивается и становится рыцарем. Когда лжецов было больше — в начале, или в конце?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку: лжецу или рыцарю — так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или рыцарь).

Ответы и решения

$\boxed{1}$ **Ответ:** сказал.

Решение. Если бы собаки рядом не было, а кот бы зашипел, то собака должна была бы быть рядом, а это не так. Поэтому вторая часть утверждения никакого смысла в себе не несет.

$\boxed{2}$ **Ответ:** одно.

Решение. Заметим, что второе утверждение означает, что у васиного числа нечетная сумма цифр. Поскольку сумма цифр может быть либо четной, либо нечетной, то верно только одно из утверждений.

$\boxed{3}$ **Ответ:** двое.

Решение. Поскольку все пять утверждений были сделаны про 5 разных школьников и три из них верны, то три школьника не сдали зачет. Два других утверждения ложны, поэтому соответствующие школьники зачет сдали.

$\boxed{4}$ **Ответ:** 2.

Решение. Заметим, что сумма ответов тех, кто ответил честно, не больше $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Т.к. $22 - 15 = 7 > 5$, то хотя бы двое соврали. Пример ответов: 5,5,3,4,5 (последние трое ответили честно).

$\boxed{5}$ **Ответ:** да, может.

Решение. Пусть есть четверо рыцарей, которые попарно дружат. А также четыре пары лжецов, где лжецы каждой пары дружат со своим рыцарем, а друг с другом не дружат. Также никакие два лжеца не дружат.

$\boxed{6}$ **Ответ:** 4306.

Решение. Пусть искомое число $\overline{abcd}$. Для каждой цифры a, b, c, d посчитаем, сколько раз она встречается в данных четырех числах. Очевидно, что сумма этих вхождений должна равняться 8. Поскольку никакая цифра не встречается в 3 числах, то каждая цифра встречается ровно дважды.

Т.е. в искомом числе могут быть только цифры 0,1,3,4,6,7. Но в первом числе из этих цифр есть только 6 и 0. Значит, эти цифры в числе точно есть. Аналогично из третьего числа, получаем цифры

4 и 3. Составим табличку, в которой плюсики стоят в тех разрядах, в которых они могут быть написаны.

0	+	−	+	−
3	−	+	−	+
4	+	−	+	−
6	+	−	−	+

Очевидно, что т.к. в разряде сотен есть только один «+», то в разряде сотен числа стоит тройка. Действуя так далее и воспользовавшись тем, что четырехзначное число с нуля не начинается, получим число 4306, которое, очевидно, подходит.

$\boxed{7}$ **Ответ:** поровну.

Решение. Рассмотрим некоторого человека. Заметим, что поменять статус он может только, когда произносят фразы его соседи. Предположим, что он был школьником. Тогда после первого соседа он станет студентом, а после второго — школьником. Если же он был студентом, то после первого соседа он станет школьником, а затем — снова студентом. Значит, сколько школьников было, столько и осталось.

$\boxed{8}$ **Ответ:** да, всегда.

Решение. Рассмотрим наибольшее подмножество A домов, никакие два из которых не являются соседними. Поселим в каждый дом множества A лжеца, а во все остальные — по рыцарю. Тогда заметим, что у каждого рыцаря есть сосед – лжец, иначе бы дом этого рыцаря можно было бы добавить в множество A. По построению ни у какого лжеца нет соседей – лжецов.

Листок 28. Расстановки ладей

1 **а)** Расставьте 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга, тремя разными способами.
б) А сколько всего таких способов?

2 Ладья стоит на поле a1 шахматной доски. Может ли она обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно один раз и закончив в клетке h8? (Ладья может перепрыгивать через клетки, в которых уже побывала.)

3 На шахматную доску поставили несколько ладей произвольным образом. Докажите, что точно найдётся ладья, бьющая не более двух других.

4 На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что количество ладей в левом верхнем квадрате 4×4 равно количеству ладей в правом нижнем квадрате 4×4.

5 На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных полях, чётно.

6 На шахматной доске 4×4 расположена фигура «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход встать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, побывав в каждой клетке по разу, и вернувшись на исходное поле?

7 На полях a1, a2 и b1 шахматной доски стоят соответственно белая, чёрная и красная ладьи. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи (т.е. в одной горизонтали или вертикали с другой ладьёй). Сколько ещё других расстановок этих ладей можно получить из исходной расстановки?

8 На шахматную доску по очереди выставляются ладьи так, что каждая нечётная по очереди выставленная ладья никого не бьёт, а каждая чётная бьёт ровно одну выставленную ранее. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску по этим правилам?

Ответы и решения

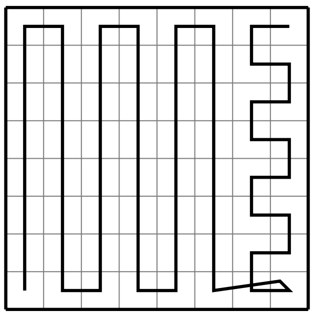
$\boxed{1}$ **а) Решение.** Можно поставить ладей вдоль одной из главных диагоналей. Два других способа из первой расстановки можно получить перестановкой столбцов.

б) Ответ: 8!.

Решение. Заметим, что любую такую расстановку можно получить перестановкой столбцов из расстановки ладей по диагонали. Причем разные перестановки задают разные расположения. Всего перестановок 8 столбцов — 8!.

$\boxed{2}$ **Ответ:** да, может.

Решение.



$\boxed{3}$ **Решение.** Выберем самую левую ладью среди самых верхних. Очевидно, что левее и выше ее нет ладей. Значит, она бьет не более двух ладей.

$\boxed{4}$ **Решение.** Заметим, что в любых четырех столбцах и любых четырех строках ровно по 4 ладьи. Но тогда сумма количеств ладей в левом нижнем квадрате и правом нижнем совпадает с суммой количеств ладей в правом нижнем и правом верхнем квадрате. Откуда следует, что количество ладей в левом верхнем квадрате 4×4 равно количеству ладей в правом нижнем квадрате 4×4.

$\boxed{5}$ **Решение.** Поскольку любую расстановку ладей можно получить из диагональной последовательными перестановками соседних столбцов, то достаточно проверить, что из расстановки ладей, при которой на черных клетках стоит четное число ладей, получается расстановка с тем же свойством. Заметим, что при такой перестановке каждая ладья меняет цвет поля. Но тогда четность ладей на черных клетках не меняется.

$\boxed{6}$ **Ответ:** да.

Решение.

5	11	6	12
1	15	2	16
8	10	7	9
4	14	3	13

$\boxed{7}$ **Ответ:** 9407.

Решение. Заметим, что эти три ладьи всегда располагаются в трёх клетках, лежащих в углах некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски («квартета» из четырёх клеток, находящихся на пересечении двух горизонталей и двух вертикалей). При этом их порядок по часовой стрелке совпадает с исходным, т.е. белая, чёрная и красная ладьи. Нетрудно убедиться, что возможно любое из таких расположений. Для этого ладьи сначала сдвигаются в три угла такого квартета (передвигаются в две вертикали, потом в две горизонтали квартета, сохраняя друг друга под защитой), а затем перемещаются по очереди по часовой стрелке через свободный угол. Всего существует $(8 \cdot 7/2)^2 = 28^2 = 784$ таких квартетов, что определяется выбором двух горизонталей и двух вертикалей, на пересечении которых и будут находиться четыре угла соответствующего прямоугольника. В каждом таком прямоугольнике существуют $4 \cdot 3 = 12$ расстановок ладей по часовой стрелке, т.к. ладьи всегда образуют уголок, в центральной клетке которого может находиться любая ладья (3 варианта), а сама центральная клетка может находиться в любом из углов квартета (4 варианта). Учитывая исходный вариант, получим всего $784 \cdot 12 - 1 = 9407$ расстановок.

$\boxed{8}$ **Ответ:** 10.

Решение. Пример, см. на рисунке:

1	2	4	6				
8							
10							
				3			
					5		
						7	
							9

Докажем, что больше 10 ладей расставить не удастся. Каждая нечётная по номеру ладья бьёт ровно 4 новые стенки из $32 = 4 \cdot 8$ стенок на доске (сторон граничных клеток), а каждая чётная ладья бьёт ровно 2 новые стенки, т.к. две стенки ряда (строки-столбца), в котором эта ладья стоит вместе с побитой ею ладьёй, уже были ранее побиты той ладьёй. Значит, каждая пара подряд выставленных ладей бьёт ровно 6 новых стенок, тогда можно выставить ровно $[32/6] = 5$ пар ладей (всего 10 ладей), после чего останется ровно $32 - 5 \cdot 6 = 2$ непобитые стенки, которых уже не хватит для появления на доске 11-й ладьи, т.к. ей надо 4 новые стенки.

Листок 29. Длины и расстояния

1 Отрезок, равный 28 см, разделён на три (возможно неравных) отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

2 На стороне AC треугольника ABC отметили точку E. Известно, что периметр треугольника ABC равен 25 см, треугольника ABE — 15 см, треугольника BCE — 17 см. Найдите длину отрезка BE.

3 Длина стороны AC треугольника ABC равна 3.8 см, длина стороны AB — 0.6 см. Известно, что длина BC — целое число. Чему она может быть равна?

4 Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырёх из них указаны на рисунке. Найдите периметр прямоугольника x.

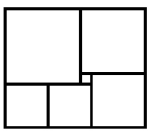
10		x
11		
12		13

5 Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

6 Один прямоугольник расположен внутри другого. Может ли так быть, что периметр внутреннего прямоугольника больше периметра внешнего?

7 На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5. Можно ли его разрезать на пять частей одинаковой площади, проводя разрезы только по линиям сетки так, чтобы суммарная длина разрезов была не больше 16?

8 Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



Ответы и решения

1. Ответ: 4 см.

Решение. Заметим, что сумма половин двух крайних отрезков равна $28-16=12$ см, значит, сумма их длин равна $2\cdot 12=24$ см, но тогда длина среднего отрезка равна $28-24=4$ см.

2. Ответ: 3.5 см.

Решение. Сложим периметры треугольников ABE и BCE. С одной стороны, мы получим сумму периметра треугольника ABC и удвоенного отрезка BE, с другой — 32 см. Откуда следует, что $2BE=32-25=7$ см, и $BE=3.5$ см.

3. Ответ: 4 см.

Решение. Известно, что в треугольнике любая сторона меньше суммы двух других. Поэтому сторона BC меньше $AB+AC=3.8+0.6=4.4$ см. Также $BC+AC>AB$, т.е. $BC+0.6>3.8$, $BC>3.2$ см. Получили что BC, длина которой целая, удовлетворяет неравенствам $4.4>BC>3.2$, т.е. $BC=4$ см.

4. Ответ: 11.

Решение 1 (с использованием прямоугольника с периметром 11). Посмотрим на прямоугольники с периметром 11 и 12. Горизонтальные стороны у них равны, а сумма двух вертикальных сторон нижнего на 1 больше вертикальных сторон верхнего. Это означает, что в последнем столбце, у среднего прямоугольника периметр на 1 меньше, чем у прямоугольника с периметром 13, т.е. 12. Применяя аналогичные рассуждения для прямоугольников с периметрами 10 и 11, получим, что у x периметр равен $12-1=11$.

Решение 2 (без его использования). Заметим, что суммы периметров маленьких прямоугольников, стоящих в противополжных углах, равны. Тогда

$$12+x=10+13=23,$$

откуда $x=11$.

5. Ответ: никакой, маршруты равны.

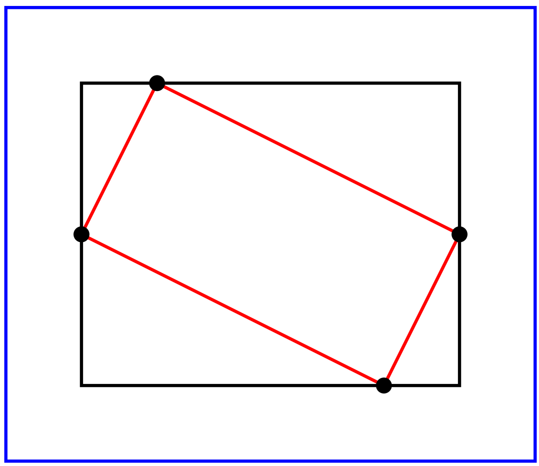
Решение. Заметим, что в обоих маршрутах есть отрезок длины 1 (в первом это отрезок EF, во втором — KD). Теперь нарисуем сетку так, чтобы все точки из условия оказались в узлах, а стороны квадратов были параллельны линиями сетки. Теперь можно заметить, что отрезки AE и CK равны, а также отрезки BF и DL равны. Получили, что оба маршрута равны.

6. Ответ: нет, не может.

Решение. Назовем внутренний прямоугольник *маленьким*, а внешний *большим*.

Ясно, что если стороны маленького прямоугольника параллельны сторнам большого, то каждая сторона большого больше соотвествующей стороны маленького, а, стало быть, периметр большого больше.

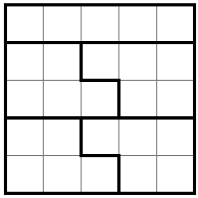
Разберем случай, когда стороны маленького не параллельны сторонам большого. Опишем около маленького прямоугольника *средний* прямоугольник так, чтобы стороны среднего были параллельны сторонам большого и вершины маленького лежали на сторонах среднего(см. рис.)



Покажем, что периметр маленького прямоугольника меньше, чем периметр среднего. Действительно, поскольку кратчайший путь между точками — отрезок, то каждая красная сторона меньше суммы двух черных отрезков, образующих с ней треугольник. Сумма всех таких черных отрезков равна периметру среднего прямогуольника. А то, что периметр среднего меньше периметра большого, мы доказали в первом случае. Значит, такого быть не могло.

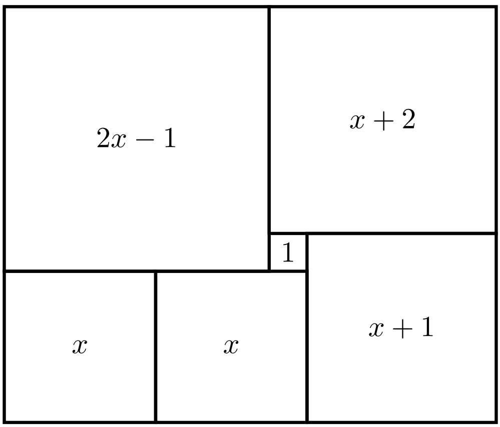
7. Ответ: да, можно.

Решение. Приведем пример.



8. Ответ: 7.

Решение. Обозначим сторону квадрата, расположенного в левом нижнем углу за x. Тогда стороны других квадратов легко вычислить. Получится, как на рисунке.



Поскольку вертикальные стороны прямоугольника равны, то $(2x-1)+x=(x+2)+(x+1)$, т.е. $3x-1=2x+3$, откуда $x=4$. Значит, сторона самого большого квадрата равна $2\cdot 4-1=8-1=7$.

Листок 30. Города и дороги

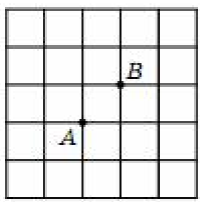
$\boxed{\mathbf{1}}$ В некоторой стране **а)** 6; **б)** 20 городов, любые два из которых соединены дорогой. Сколько всего дорог в этой стране? **в)** Докажите, что если число городов равно n, то дорог $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

$\boxed{\mathbf{3}}$ В государстве 100 городов, и из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Он хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



6 В стране 96 городов, из которых 24 — «областные». Некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один «областной» город. Какое наибольшее количество дорог могло быть в этой стране?

7 В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Любые две команды играют друг с другом два раза: по разу на поле каждого из соперников. **а)** Какое максимальное и какое минимальное количество очков может набрать команда, участвующая в чемпионате России? **б)** Какое минимальное и какое максимальное количество очков могут набрать в сумме все команды? (В футболе за победу в матче даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.)

8 В шахматном турнире приняло участие несколько человек. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Оказалось, что все, кроме Гоши, набрали одинаковое количество очков. Докажите, что Гоша либо у всех выиграл, либо всем проиграл. (В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражению — 0 очков.)

Ответы и решения

$\boxed{\mathbf{1}}$ **Ответ:** а) 15; б) 190.

Решение. Докажем **в)**. Посчитаем пары городов. На первое место можно выбрать n городов, на второе уже $n-1$ (так как город не может быть соединен сам с собой). Следовательно, всего пар $n(n-1)$. Заметим, что число дорог в два раза меньше числа пар, так как пару город А – город Б мы посчитали 2 раза (А-Б и Б-А). Значит, надо поделить на 2. Пункты а) и б) получаются подстановкой в формулу.

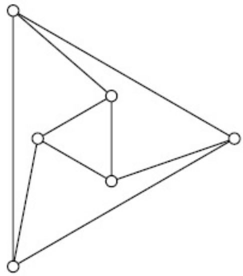
$\boxed{\mathbf{2}}$ **Ответ:** нет, нельзя.

Решение. По признаку делимости на 3 число делится на 3 только в том случае, когда сумма его цифр делится на 3. 1 не делится на 3. Следовательно, этот город может быть соединен только с городом, который на 3 тоже не делится и т.д. (Иначе получится, что сумма цифр не делится на 3, так как сумма кратного трем и не кратного не делится на 3). 9 делится на 3. Поэтому добраться из города в город нельзя.

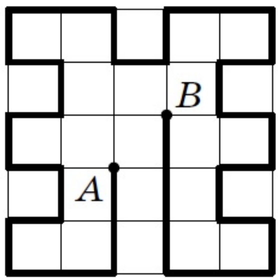
$\boxed{\mathbf{3}}$ **Ответ:** 200.

Решение. В государстве 100 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Значит, если мы умножим 100 на 4, то получим число дорог, умноженное на 2, так как каждую дорогу мы посчитали 2 раза, ведь дорога соединяет 2 города. Следовательно, число дорог равно $\dfrac{100 \cdot 4}{2} = 200$.

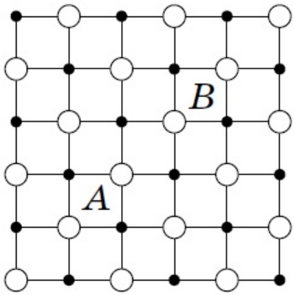
$\boxed{4}$ **Решение.** План города может быть, например, таким.



$\boxed{5}$ **Решение.** Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке.



Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрёстками). Докажем, что более длинный маршрут невозможен. Всего в Старом городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда турист проходит очередную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше чем 35 улиц турист пройти не сможет (начальный перекрёсток А не считается). Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) любознательный турист тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке.



Всякий раз, проходя улицу, турист попадает на перекрёсток другого цвета. И отель, и вокзал расположены на белых перекрёстках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно.

$\boxed{6}$ **Ответ:** 2004.

Решение. Очевидно, что обычные города не соединены дорогами, иначе бы существовал путь не проходящий через областной город. Значит, максимальное число дорог в том случае, когда каждый обычный город соединен с каждым областным, и все областные соединены между собой. Нетрудно убедиться, что ответ в таком случае будет равен $\dfrac{24 \cdot 23}{2} + (96 - 24) \cdot 24 = 276 + 1728 = 2004$.

$\boxed{7}$ **Ответ: а)** 90 и 0 очков; **б)** 480 и 720 очков.

Решение. а) Ясно, что наибольшее число очков команда может набрать, когда все матчи выиграет, а минимальное, когда все матчи проиграет.

б) Если в матче одна из команд ожержит победу, то в сумме за матч будет разыграно 3 очка; если же ни одна из команд не выиграет, то в сумме будет разыграно два очка. Ясно, что можно добиться того, чтобы в каждом матче было разыграно 2 очка — каждый матч закончиться ничьей. Тогда будет разыграно всего $16 \cdot 15 \cdot 2 = 480$ очков. Максимальное число будет разыграно, когда в каждом матче одна из команд выиграет. В этом случае будет разыграно $16 \cdot 15 \cdot 3 = 720$ очков.

$\boxed{8}$ **Решение.** Поменяем немного правила начисления очков: за победу будем давать 2 очка, а за ничью 1 очко. Ясно, что после такой замены все условия задачи сохранятся и каждый из участников наберет целое число. Будем считать, что в этом турнире всего участников было n. Тогда все участники в сумме набрали $n(n-1)$ очков. Пусть у тех участников, которые набрали равное число очков, по k очков, а у Гоши G очков. Тогда

$$n(n-1) = k(n-1) + G.$$

Заметим, что G кратно $n-1$. Но всего максимум очков могло быть $2(n-1)$ ($n-1$ тур, в каждом максимум два очка). Значит, $G = 0, n-1$ или $2(n-1)$. В первом и третьем случае получим то, что нужно доказать, во втором получим $n = k+1$, или $k = n-1$, но тогда все, в том числе и Гоша, набрали $n-1$ очко, но это противоречит условию задачи.