Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

(7 класс, II полугодие)

Составители: Е. А. Асташов, Я. А. Верёвкин, А. А. Дейч,
С. М. Саулин, А. В. Феклина

Москва, 2017

Математический кружок. (7 класс, II полугодие). / Методическое пособие для выявления и развития математических способностей обучающихся // Сост. Е. А. Асташов, Я. А. Верёвкин, А. А. Дейч, С. М. Саулин, А. В. Феклина. — М.: МГУ, 2017.

Методическое пособие разработано в рамках Концепции Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова «Повышение математической культуры в обществе» и при финансовой поддержке Департамента образования г. Москвы.

Пособие предназначено для преподавателей, организующих и проводящих математические кружки.

Содержание

Листок 16. Равенства и неравенства

В начале занятия рекомендуется разобрать следующие задачи:

- Выделить полный квадрат в выражениях: **а)** $x^2 + 10x + 9$; **б)** $x^2 - x - 2$.
- Решить уравнения: **а)** $x^2 - 9 = 0$; **б)** $x^2 - x - 2 = 0$.
- Доказать неравенства: **а)** $-x^2 - 2x - 1 \leqslant 0$; **б)** $x^2 + 10x + 30 \geqslant 5$.

Во всех задачах ниже латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ обозначены произвольные действительные числа (если не указано иное).

$\boxed{1}$ Пусть x — произвольное действительное число. Что можно сказать о знаках чисел: $-x$; $x - 1$; $1 - x$; x^2; $(x - 1)^2$; x^3; x^{2n}; x^{2n+1} (n — натуральное число)?

Ответ. $-x$ **имеет знак, противоположный знаку числа** x; $x - 1$ **больше нуля, если** $x > 1$, **и меньше или равно нуля, если** $x \leqslant 1$; $1 - x$ **имеет знак, противоположный знаку числа** $x - 1$ **(предыдущий пункт);** x^2 **всегда больше или равно нуля;** $(x - 1)^2$ **тоже всегда больше или равно нуля;** x^3 **имеет знак такой же, как число** x; x^{2n} **всегда больше или равно нуля,** x^{2n+1} **имеет знак такой же, как число** x.

Решение. Все знаки выводятся рассуждениями из степеней и простейших неравенств. Существенно, что чётная степень любого числа всегда неотрицательна. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Если не получается сразу дать общий ответ, попробуйте поподставлять различные числа на место x, чтобы угадать некоторые закономерности, а потом сформулировать общий ответ.*

$\boxed{2}$ **а)** Пусть $a < b$. Верно ли, что $a^2 < b^2$? **б)** Пусть $a^2 < b^2$. Верно ли, что $a^3 < b^3$?

Ответ. **а) Нет; б) Нет.**

Решение. **а)** Контрпример: $a = -2, b = -1$; **б)** Контрпример: $a = -1, b = -2$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте подставлять различные пары чисел на место a и b. А если подставлять отрицательные числа?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Пусть $a < b < c$. Какие из следующих двойных неравенств возможны:

а) $a^2 < b^2 < c^2$; **б)** $b^2 < c^2 < a^2$; **в)** $b^2 < a^2 < c^2$; **г)** $a^2 < c^2 < b^2$; **д)** $c^2 < b^2 < a^2$?.

Ответ. **а) Возможно; б) возможно; в) возможно; г) невозможно; д) возможно.**

Решение. **а)** Пример: $a = 1, b = 2, c = 3$; **б)** $a = -100, b = 1, c = 2$; **в)** $a = -2, b = -1, c = 100$; **г)** В данном пункте квадраты чисел b и c упорядочены не так, как сами эти числа. Такое возможно, только если $b < 0$, но тогда и $a < 0$, а так как при этом $a < b$, то после смены знака это неравенство сохраниться не может. **д)** Пример: $a = -3, b = -2, c = -1$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте подставлять различные числа и поискать примеры. В пункте г) можно подсказать рассуждение со сменами знаков.*

$\boxed{\mathbf{4}}$ Представьте выражения в виде полных квадратов: **а)** x^2+2x+1; **б)** $x^2 + 6x + 9$; **в)** $16x^2 + 8x + 1$; **г)** $4u^2 - 20uv + 25v^2$; **д)** $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

Ответ. **а)** $(x + 1)^2$; **б)** $(x + 3)^2$; **в)** $(4x + 1)^2$; **г)** $(2u - 5v)^2$; **д)** $(a + b + c)^2$.

Решение. Во всех пунктах используется формула квадрата суммы. В последнем пункте — формула квадрата суммы для трёх слагаемых: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b)^2 + c^2 + 2c(b + a) = (a + b + c)^2$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Вспомните примеры, разобранные в начале занятия. Как выделять полный квадрат? Что будет квадратом первого слагаемого, что — квадратом второго, что — удвоенным произведением первого и второго?*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите неравенства при всех значениях переменных: **а)** $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$; **б)** $-4x^2 - 4x - 1 \leqslant 0$; **в)** $x^2 + 6x + 10 \geqslant 1$; **г)** $(x - y)(y - x + 6) - 9 \leqslant 0$; **д)** $u^2 - 2uv + 2v^2 + 2v + 2 > 0$.

Решение. Во всех пунктах используется выделение полного квадрата и свойство неотрицательности квадрата: **а)** $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geqslant 0$; **б)** $-4x^2-4x-1 = -(2x+1)^2 \leqslant 0$; **в)** $x^2+6x+10 = (x+3)^2+1 \geqslant 1$; **г)** $(x-y)(y-x+6)-9 = -(x-y)^2+6(x-y)-9 = -(x-y-3)^2 \leqslant 0$; **д)** $u^2 - 2uv + 2v^2 + 2v + 2 = (u - v)^2 + (v + 1)^2 + 1 > 0$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте выделить полный квадрат (возможно, со знаком минус) или даже несколько полных квадратов.*

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** Докажите неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Когда оно обращается в равенство?

б) Периметр прямоугольника равен 4. Какую наибольшую площадь он может иметь?

Ответ. **а) При** $a = b$; **б)** 1.

Решение. **а)** $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geqslant 0$. В равенство обращается при $a = b$, что следует из вычислений.

б) Пусть стороны прямоугольника равны a и b. Тогда по условию $a + b = 2$, и надо найти максимально возможное значение произведения $a \cdot b = a \cdot (2 - a) = 2a - a^2$. Для этого выделим полный квадрат: $-a^2 + 2a = -(a^2 - 2 \cdot a + 1 - 1) = -(a - 1)^2 + 1$, то есть максимум достигается при $a = 1$, и в этом случае $a = b = 1$, а $S = 1$. Другими словами, наибольшую площадь среди прямоугольников с данным периметром имеет квадрат. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *В первом пункте попробуйте перенести всё в одну часть и применить формулы сокращённого умножения. а во втором пункте* *попробуйте задать площадь через одну переменную и найти максимум.*

$\boxed{7}$ Решите уравнения: **а)** $(x-1)^2=0$; **б)** $(x-1)^2+(2y+5)^4=0$; **в)** $x^2=1$; **г)** $(x-1)^2=1$; **д)** $x^2+6x+8=0$.
Ответ. **а)** $x=1$**; б)** $x=1, y=-5/2$**; в)** $x=\pm 1$**; г)** $x=2, x=0$**; д)** $x=-4, x=-2$**.**

Решение. **а)** Квадрат выражения равен нулю тогда и только тогда, когда само выражение обращается в 0 (в данном случае — при $x-1=0$, то есть $x=1$). **б)** Сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждый квадрат равен нулю (иначе хотя бы один из них положителен, и сумма положительна), то есть при $(x-1)^2=0$ и $((2y+5)^2)^2=0$, откуда $x=1, y=-5/2$. **в)** Первый способ: перенести единицы в левую часть и разложить разность квадратов на множители. Второй способ: догадаться, что при возведении в квадрат единицу дают только числа 1 и -1. **г)** Квадрат числа равен 1 тогда и только тогда, когда число равно ± 1, извлекаем корень и решаем два линейных уравнения. **д)** Выделяем полный квадрат: $x^2+6x+8=x^2+6x+9-1=(x+3)^2-1$, а далее действуем как в предыдущих пунктах. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *При каких условиях квадрат выражения равен нулю? А сумма двух квадратов? А при каких условиях квадрат выражения равен 1?*

$\boxed{8}$ **а)** Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. **б)** Когда оно обращается в равенство?
Ответ. **б)** $a=b=c$**.**

Решение. **а)** Умножим всё на 2: $2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2\cdot(ab+bc+ac) \Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 \geqslant 0$. **б)** Сумма квадратов равно нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то есть из выражения выше получаем, что $a=b=c$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Перенесите всё в одну сторону и умножьте на 2. Можно ли выделить полный квадрат в полученном выражении? А представить его как сумму квадратов?*

9 Докажите неравенство: $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$;

Решение. Сделаем замену $a_1 = a^2, b_1 = b^2, c_1 = c^2$ и получим неравенство их пункта а) задачи 8. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Найдите среди предыдущих задач какую-нибудь задачу, похожую на эту. Как эту задачу свести к уже решённой?*

Листок 17. Комбинаторика — 1

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k предметов (порядок, в котором они выбираются, неважен) называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пользуясь только определением, докажите следующие равенства:

а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
б) $C_n^1 = C_n^n - 1 = n$;
в) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
г) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
д) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Решение. **а)** C_n^0 и C_n^n — это количество способов выбрать из n объектов 0 или все. Но сделать мы можем лишь одним способом.
б) C_n^1 — это количество способов выбрать из n объектов 1, то есть мы можем выбрать каждый из наших объектов, и это как раз будут все варианты, всего получается n. $C_n^n - 1$ — аналогично, только теперь мы выбираем n способами 1 объект, который не будем использовать.
в) C_n^{n-k} — это количество способов выбрать из n объектов k, которые мы будем использовать, а C_n^k — это количество способов выбрать из тех же n объектов k, которые мы не будем использовать(в этом случае мы используем все, кроме k выбранных, а это как раз $n - k$.)
г) Предположим, что нам из $n + 1$ детей в классе нужно выбрать $k + 1$, которые поедут на экскурсию. Тогда C_{n+1}^{k+1} — это количество способов, которыми мы можем их выбрать. Теперь возьмем произвольного ребенка в классе. Например, Васю. Вася может поехать на экскурсию, а может не поехать. Если он поедет, то останется еще выбрать k ребят из n оставшихся, это можно сделать C_n^k способами. Если Вася не поедет, нам придется из оставшихся n выбрать $k + 1$ школьника, это как раз $C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ способов. Таким образом, мы перечислили все варианты и как раз получили оба слагаемых в ле-

вой части равенства.

д) Нам нужно посчитать количество способов выбрать из n объектов какое угодно количество объектов. Рассмотрим первый объект — его мы можем выбрать, а можем не выбирать, это два варианта. Второй объект мы также можем выбрать или не выбрать — это еще два варианта. Аналогично с остальными объектами. Чтобы посчитать результат остается вычислить: $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2(n$ раз$)= 2^n$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Предложите ему для маленького количества предметов посмотреть, что это все за множества. Сначала для 1 объекта, затем для 2, 3 и 4. Почему они равны?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Сколько способов из 16 инопланетян выбрать капитана тарелки, помощника капитана и повара? **б)** Сколько способов распределить эти роли между тремя инопланетянами? **в)** Сколько способов из 16 инопланетян выбрать трёх? **г)** Есть n инопланетян, сколькими способами можно поставить k из них в очередь на медосмотр перед полётом? **д)** Сколько способов из n инопланетян выбрать k инопланетян?

Ответ. **а)** $16 \cdot 15 \cdot 14$; **б)** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$; **в)** $C_{16}^3 = \frac{16\cdot15\cdot14}{3!}$; **г)** $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (k + 1) \cdot k$;
д) $C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot k}{k!}$.

Решение. **а)** Начнем с капитана. Им может стать любой из марсиан, поэтому у нас еть 16 вариантов. Затем выберем помощника. Для любого выбранного капитана у нас остается еще 15 инопланетян, которые могут стать помощниками. Значит, каписана и помощника мы выбираем $16 \cdot 15$ способами. Аалогично, для любым капитана и помощника мы 14 способами выбираем повара. Итого: $16 \cdot 15 \cdot 14$ способов. **б)** Капитана мы выбираем тремя способами(им может стать любой). Затем любому капитану выбираем двумя способами помощника, оставшийся инопланетянин будет поваром(здесь есть ровно один способ). Получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!(= 6)$ способов. Также можно перечислить их явно. Пронумеруем наших инопланетян и будем записывать подряд: капитан, помощник, повар. Получаем:

$123, 132, 213, 231, 312, 321$. **в)** Мы уже знаем(пункт **а)**), сколько есть способов выбрать капитана, помощника и повара. Этот пункт отличается тем, что нам все равно, в каком порядке мы этих троих выбираем. То есть, нам все равно, выберем мы сначала Васю, а затем Петю и Сережу, или сначала Сережу, а потом уже Васю и Петю. Как мы только что считали(пункт **б)**), есть 3! способов распределить роли между тремя инопланетянами. А значит, мы каждый вариант посчитали 3! раз. Чтобы получить окончательный ответ, на это число нужно поделить: $C_{16}^3 = \frac{16\cdot15\cdot14}{3!}$. **г)** Это аналог пункта **а)**. Первого мы выбираем n способами, второго — $(n-1)$-им способом, ..., k-ого — $n-k+1$-им способом. Итого: $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot k$. **д)** В пункте **г)** мы уже выбрали k инопланетян. Но теперь нам не важен порядок, а расставить в очереди k инопланетян есть $k!$ способов(аналог пункта **б)**). Таким образом, получаем ответ: $C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot k}{k!}$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Стоит сначала попробовать на числах поменьше. И на более понятных объектах. Например, раскладывать в ряд 3 цветных карандаша или выбирать 3 карандаша из 5. Можно выписать все комбинации. Несколько раз сделать "шаг"к количеству, которое на 1 больше, посмотреть, как это влияет на ответ.*

3 На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

Ответ. $C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3!} = \frac{10!}{7!\cdot3!}$

Решение. Так как никакие три точки не лежат на одной прямой, они образуют треугольник. Значит, нам нужно узнать количество способов выбрать три точки из 10 данных. Это делается аналогично пункту **д)** задачи 2. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько существует треугольников, если точек 4? А если 5? Сколько нам нужно выбрать точек, чтобы получить треугольник? А почему нам важно, что никакие три точки не лежат на одной прямой?*

$\boxed{4}$ Инопланетяне играют в шахматы на доске 8×8. Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 **а)** разных, **б)** одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Ответ. **а)** $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2^1 \cdot 1^2 = (8!)^2$; **б)** $8!$.

Решение. **а)** Первую ладью мы можем поставить на любую из 64 клеток. Легко проверить, что куда бы мы ее не поставили, она будет бить ровно 14 клеток, а еще одну клетку занимать сама. Значит, для второй ладьи остается $64 - 15 = 49$ клеток. И вторая ладья также бьет ровно 14 клеток, а одну занимает сама, но 2 из этих 14 клеток уже бьет первая ладья, остается 12 "новых"клеток. И тогда третью ладью мы ставим на любую из $49 - 13 = 36$ клеток. И так далее. Получаем ответ. **б)** Этот пункт отличается от предыдущего тем, что здесь ладьи одинаковые, а значит, нам не важно, в каком порядке мы будем их ставить. А способовы расставить 8 разных ладей на 8 клеток ровно 8!, значит, каждую расстановку одинаковых ладей мы посчитали 8! раз. Отсюда получаем ответ: $(8!)^2 : (8!) = 8!$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько способов поставить первую ладью? А сколько она бьет клеток? Тогда сколько способов поставить следущую ладью?*

○ `Школьник не понимает, чем отличаются два пункта задачи.`

● *Можно для начала расставить две одинаковые и две разные ладьи на доске* 2×2. *Каких способов больше? А почему так получается?*

$\boxed{5}$ Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

Ответ. $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{12!}{(3!)^4}$

Решение. Заполнить первую тарелку — это тоже самое, что выбрать трех случайных инопланетян, это мы можем сделать $C_(12)^3$ способами. Теперь C_9^3 способами мы заполняем вторую тарелку. Третью и четвертую заполняем аналогично. Так как все тарелки разноцветные, порядок их заполнения важен, а значит, мы получаем окончательный ответ: $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$ □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько есть способов заполнить первую тарелку? А вторую? А их обе?*

$\boxed{\textbf{6}}$ Сколькими есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5 × 9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

Ответ. $C_{12}^4 = C_{12}^8$.

Решение. Всего нам придется сделать12 шагов: 4 вверх и 8 вправо. Если мы выберем, какие по счету шаги будем делать вверх, это однозначно задаст наш путь. А значит, всего способов пройти есть как раз C_{12}^4. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько всего мы должны сделать шагов? А сколько из них будет вверх? А сколько способов выбрать, какие именно?*

$\boxed{\textbf{7}}$ 22 дерева растут в круг. Сколько существует способов натянуть между ними две одинаковых верёвки так, чтоб они не пересекались? (Если концы верёвок привязаны к одному дереву, то они тоже пересекаются!)

Ответ. $C_{12}^4 \cdot 2$.

Решение. Так как веревки не могут пересекаться даже концами, нам нужно ровно 4 дерева, чтобы натянуть их. Выбрать 4 дерева мы можемC_{12}^4 способами. Но на любые 4 дерева мы можем натянуть наши веревки без пересечений ровно двумя разными способами(Здесь важно, что веревки расположены по кругу, из-за этого наши 4 дерева находятся в вершинах выпуклого четырехугольника). А значит, нужно умножить на два количество способов выбрать 4 дерева, чтобы получить ответ. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько нам нужно деревьев, чтобы привязать две веревки(без пересечений)? А сколько способов привязать к этим(четырем) деревьям веревки?*

$\boxed{8}$ **а)**7 ящиков занумерованы числами от 1 до 7. Сколько есть способов разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? **б)** А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?
Ответ. **а)** C_{19}^{6}; **б)** C_{26}^{6}.

Решение. **а)** Разложим все шарики в ряд. Теперь будем между ними вставлять "перегородки"(шесть штук). То, что лежит левее всех перегородок, будем считать собержимым первого ящика, между первой и второй перегородками — второго, и так далее, то, что лежит правее всех(шести) перегородок — содержимым седьмого ящика. Так как у нас нет пустых ящиков, между любыми двумя шариками может стоять не больше одной перегородки, также перегородки не могут стоять левее или правее всех шариков. Таким образом, у нас есть 19 мест, на которые мы можем ставить перегородки, из них нам нужно выбрать 6. Это можно сделать C_{19}^{6} способами (аналог задачи **2г**)).
б) Этот пункт отличается тем, что мы можем оставлять ящики пустыми. Вместо того, чтобы решать новую задачу, сведем этот пункт к предыдущему. Заметим, что если в каждую коробку добавить по одному шарику, то пустых коробок не останется(а разные способы разложить шарики так и останутся разными). Мы получили задачу, аналогичную пункту **а)**, но теперь нам надо разложить по коробкам не 20 шариков, а 27, коробок же по прежнему остается 7. В таком случае, мы можем разложить шарики C_{27}^{6} способами. Затем из каждой коробки достанем по одному шарику(Это можно сделать, так как пустых коробок нет. При этом нам все равно, какой шарик вытаскивать, так как они все одинаковые, значит, мы можем сделать это ровно одним способом.). Значит, C_{27}^{6} — и есть окончательный ответ. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Давай разложим шарики в ряд и отделим "перегородкой"те, которые будут в первом ящике, затем те, которые будут во втором, и так далее. Сколько нам потребуется перегородок, если у нас всего 7 ящиков? А сколько есть мест, на которые мы можем* *поставить перегородку? А мы можем в одно место поставить несколько перегородок?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *Чем отличаются эти два пункта? А давай добавим в каждую коробку по шарику. Сколько тогда всего шариков? А сколько способов такое количество шариков разложить по нашим коробкам так, чтобы пустых не было? А теперь давай вытащим наши «дополнительные» шарики обратно.*

Листок 18. Комбинаторика — 2

В начале занятия стоит разобрать несколько задач из предыдущего листочка, чтобы вспомнить, что такое C_n^k и чему равно это число. Также стоит обратить внимание школьников на то, что цель занятия — понять теоремы из листочка и научиться ими пользоваться, а доказательства можно оставить на конец занятия (или разобрать у доски). Также нужно разобрать у доски определение и способ построения треугольника Паскаля:

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:
— в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
— в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
— каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.
Получим такой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots}
\end{array}$$

$\boxed{1}$ **а)** Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).
б) Сколько чисел в 2018–й строке треугольника Паскаля?
Ответ. **б) 2019.**

Решение. **б)** Заметим, что в первой строке два числа, а в каждой следующей количество чисел увеличивается на 1. Таким образом, в строке с номером n будет $n + 1$ число. □

$\boxed{2}$ Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию.

Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n, то это верно и для строки с номером $n + 1$.

Решение. Ясно, что для первой строчки это утверждение верно. Покажем, что если для некоторой строчки оно верно, то оно будет верно и для следующей. Тогда мы докажем, что для всех строчек треугольника Паскаля утверждение верно. Сначала разберемся с центральным числом. Оно есть только в строчках с четными номерами и равно сумме двух средних чисел предыдущей строчки, а для нее мы уже знаем, что эти числа самые большие, значит, их сумма будет также больше, чем сумма любых других двух чисел. Теперь покажем, что до середины числа идут в порядке возрастания, убывание после середины будет доказываться аналогично. Рассмотрим i-ое и $(i+1)$ числа нашей строчки. Ясно, что $(i+1)$-ое число — это сумма чисел, стоящих в предыдущей строке правее(но не дальше середины), а мы знаем, что в предыдущей строке числа до середины возрастают. Значит, и сумма будет больше. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай посмотрим на два соседних числа в некоторой строчке. Какое из них больше? А суммой каких чисел они являются? А про предыдущую строчку мы уже доказали, что в ней числа идут в порядке возрастания(убывания)?*

$\boxed{\textbf{3}}$ **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2017-ую и 2018-ую строки. **в)** Чему равна сумма цифр в n-ой строке?

Ответ. **а), б) в два раза; в)** 2^n**.**

Решение. **а)** Просто считаем. **б)** По определению, каждое число в треугольнике Паскаля является суммой чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Причем, каждое число предыдущей строки входит ровно в две суммы для чисел текущей строки. А значит, сумма чисел при переходе к следующей строке увеличивается ровно в два раза. **в)** Заметим, что сумма цифр в первой строке равна

$2 = 2^1$, а сумма в каждой следующей строке в два раза больше,чем в предыдущей. Отсюда получаем ответ. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Смотри, ответ в пункте* ***а)*** *можно просто посчитать. Отлично, а если взять какие-то другие строчки и тоже просто посчитать? Как ты думаешь, какой ответ будет в* ***б)****?*

$\boxed{4}$ **а)** Поставим знаки " + " и "−" между числами в 99–ой строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак "−", между вторым и третьим " + ", между третьим и четвёртым "−", потом опять " + ", и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100–ой строки. Докажите!

Решение. **а)** Заметим, что в первой и второй половинах строки у нас одни и те же числа. А теперь заметим, что каждое число в нашем выражении будет встречаться с разными знаками. Чтобы это понять, посмотрим на середину строки. Там рядом стоят два одинаковых числа. Ясно, что они будут с разными знаками. Слева и справа от них стоит еще пара одинаковых чисел. Перед ними тоже будут разные знаки. И так далее. **б)** Как мы помним, каждое число в треугольнике Паскаля является суммой чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Тогда распишем наше выражение, используя этот факт. Получается, что каждое число предыдущей строки встречается в нашем выражении с разными знаками, и тогда значение выражения равно нулю. Например: $1 + 4 - 6 + 4 - 1 = 1 - (1 + 3) + (3 + 3) - (3 + 1) + 1 = 0.$ □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Смотри, треугольник у нас симметричный. С каким знаком у нас будет первая единица? А последняя? А с какими знаками будет 99?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *А помнишь, как в предыдущей задаче мы доказывали, что сумма при переходе к новой строчке увеличивается вдвое? Давай, здесь* *тоже представим каждое число, как сумму двух чисел предыдущей строки.*

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Будем двигаться по треугольнику Паскаля, переходя от каждой буквы только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа n в треугольнике Паскаля в точности равно n. **б)** Докажите, что k-ое число в n-ой строке равно C_n^k.*(Мы нумеруем числа в строке, начиная с нуля.)*

Решение. **а)** В каждое число треугольника Паскаля можно прийти сверху-слева или сверху-справа. Поэтому количество способов дойти до него равно сумме количеств способов дойти до двух чисел над ним. Кроме того, дойти до всех единиц, стоящих вдоль боковых сторон треугольника, можно единственным способом — все время двигаясь вдоль этих боковых сторон. То есть количество способов дойти до каждого элемента треугольника Паскаля вычисляется по тем же правилам, что сами элементы. **б)** Заметим, что нам нужно сделать ровно n шагов, чтобы из верхней единицы попасть в нашу строчку. При этом, среди этих n шагов ровно k должны быть вправо, чтобы мы попали именно в k-ое число строки. Тогда получается, что количество способов дойти — это в точности количество способов из n шагов выбрать те k, которые будут сделаны вправо. А это и есть C_n^k. ☐

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Давай выберем конкретное число в треугольнике Паскаля. Откуда можно попасть в это число? А откуда можно попасть в них? А дальше?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *Сколько нам нужно сделать шагов, чтобы добраться до этого числа из самой верхней единицы? А сколько из них должны быть влево/вправо?*

$\boxed{\mathbf{6}}$ *(Бином Ньютона)* Докажите, что если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a+b)^n$, то для всех $0 \le k \le n$ коэффициент при $a^{n-k}b^k$ будет равен C_n^k:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1}b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n$$

Решение. Результат раскрытия скобок до приведения подобных можно записывать, не переставляя порядка сомножителей, например: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb$ или $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = aaa+baa+aba+bba+aab+bab+abb+bbb$. В выражении $(a+b)^n$ одночлен $a^k b^{n-k}$ формируется из многочленов, составленных из k букв a и $n-k$ букв b. Таких слов как раз $C_n^k = C_n^{n-k}$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай сначала посмотрим для маленьких степеней. Нарпимер, для* 0, 1, 2. *Все работает. Теперь давай для больших. Какие слагаемые у нас получатся, если мы распишем явно наше произведение? А по сколько их будет? Как это посчиать?*

7 Пользуясь биномом Ньютона посчитайте **а)** 21^4; **б)** 19^4.
Ответ. **а) 194481; б) 130321.**

Решение. **а)** Распишем: $21^4 = (20+1)^4 = C_4^0 \cdot 20^4 \cdot 1^0 + C_4^1 \cdot 20^3 \cdot 1^1 + C_4^2 \cdot 20^2 \cdot 1^2 + C_4^3 \cdot 20^1 \cdot 1^3 + C_4^4 \cdot 20^0 \cdot 1^4$. Для этих вычислений калькулятор нам не понадобится. **б)** Аналогично предыдущем пункту, только теперь $19 = 20 - 1$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Смотри, какое число нам было бы удобно возводить в степень без сложных вычислений?(оканчивающееся нулем) А какое "удобное" число есть рядом с числами* 21 *и* 19*? Тогда как нам воспользоваться биномом Ньютона?*

8 В разложении выражения $(x+y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n, если известно, что x и y натуральные.

Решение. По условию $n \cdot x^{n-1}y = 240$, $n(n-1) \cdot x^{n-2}y^2 = 720 \cdot 2$, $n(n-1)(n-2) \cdot x^{n-3}y^3 = 1080 \cdot 6$. Поделив второе уравнение на первое, f третье — на второе и обозначив $t = \frac{y}{x}$, получим $(n-1) \cdot t =$

$6, (n-2)\cdot t = 4.5$. Отсюда $t = 1.5, n-1 = 4$. Подставим в первое уравнение: $5x^5 \cdot 1.5 = 240$, то есть $x = 2, y = 3, n = 5$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай распишем* $(x+y)^n$*, пользуясь биномом Ньютона. Нам нужны первые три члена. А теперь распиши* C_n^k *по определению. А теперь давай решать эту систему уравнений.*

$\boxed{\mathbf{9}}$ С помощью бинома Ньютона докажите, что:
а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$;
в) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Решение. **а)** Посчитаем выражение: $(1+1)^n = 2^n$, но если расписать то же самое через бином Ньютона, коэффициентами будут как раз C_n^k, а $a^k b^{n-k} = 1$.
б) Аналогично пункту **а)**, но теперь мы будем раскрывать скобки в выражении $(1-1)^n$.
в) C_{n+1}^{k+1} — это коэффициент при $a^{(n+1)-(k+1)}b^{k+1}$ в разложении $(a+b)^{n+1}$. А C_n^k и C_n^{k+1} — это коэффициенты в разложении $(a+b)^n$ при $a^{n-k}b^k$ и $a^{n-(k+1)}b^{k+1}$. Теперь распишем $(a+b)^n \cdot (a+b)$. Так как $a^{(n+1)-(k+1)}b^{k+1} = a^{n-(k+1)}b^{k+1} \cdot a = a^{n-k}b^k \cdot b$, получим как раз нужное равенство для коэффициентов: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
г) Аналогично предыдущему пункту, только теперь мы раскрываем скобки в левой и правой частях равенства $(a+b)^{2n} = (a+b)^n(a+b)^n$ и сравниваем коэффициенты при одночлене $a^n b^n$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать в пунктах а) и б).`

● *Давай выпишем бином Ньютона. А теперь нужно придумать, какие взять* a *и* b*, чтобы бином превратился в наше выражение.*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте в).`

● *В каком выражении и при каких одночленах у нас получаются такие коэффициенты такие коэффициенты? А как перейти от* $(a+b)^n$ *к* $(a+b)^{n+1}$*?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте г).`

- *А давай посмотрим теперь на* $(a+b)^{2n}$

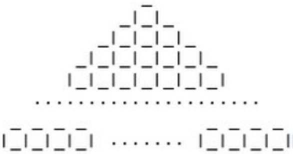
Листок 19. Постепенное конструирование

В начале занятия следует пояснить, что требуется для решения задач этого листочка. Во всех задачах нужно доказать некоторое утверждение для всевозможных натуральных значений n. Идея решения большинства задач в этом листочке одна и та же: сначала проверяем утверждение для $n = 1$ (или для наименьшего натурального n, для которого оно имеет смысл), а затем показываем, что если утверждение выполняется для некоторого n, то оно остается верным и при замене n на $n + 1$.

$\boxed{1}$ **а)** Найдите значение суммы $1+3+5+\cdots+(2n-1)$; **б)** Докажите, что $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Ответ. **а)** n^2.

Решение. **а) Геометрический способ доказательства.** Рассмотрим «пирамидку» на рисунке: в каждой горизонтали распологается прямоугольник $1 \times n$, и сумма их площадей равна $1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + \cdots + 1 \cdot (2n - 1)$. □



Ограничимся рассмотрением первых n горизонталей. Если переставить левую (по отношению к центральной вертикали) часть пирамидки направо, то получится, как несложно видеть, квадрат $n \times n$. Его площадь равна площади исходной фигуры. Поэтому $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. **Арифметический способ доказательства.** Докажем, что искомая сумма равна n^2, индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение аерно для любых $k < n + 1$. Тогда $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Здесь мы воспользовались предположением индукции. Таким образом, утверждение доказано. **б)** Доказательство проведем индукцией по n. Проверка утверждения для $n = 0$ очевидна. Шаг индукции: $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} =$

$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$. Утверждение пункта **б)** доказано.

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Нарисуйте картинку, которая используется в геометрическом доказательстве. Как ей воспользоваться?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *Проверьте равенство для* $n = 0, 1, 2, 3$ *и 4.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Бодрый студент записывал на лекции по 90 слов в минуту. Сонный студент сначала был совсем сонный, и за первую минуту лекции записал только одно слово. Потом он начал понемногу просыпаться, и за вторую минуту лекции записал уже три слова, за третью — пять, за четвёртую — семь, и так далее. **а)** Сколько времени длилась лекция, если в итоге оба студента записали слов поровну? **б)** Сколько слов записал на лекции каждый студент?

Ответ. **а) 90 минут; б) 8100 слов.**

Решение. **а)** Заметим, что за n минут сонный студент записал $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ слов, а бодрый – $90n$. Воспользуемся предыдущей задачей. Имеем $n^2 = 90n$, то есть $n = 90$. **б)** Из пункта **а)** следует, что количество слов, записанное каждым студентом, равно $90 \cdot 90 = 8100$. ☐

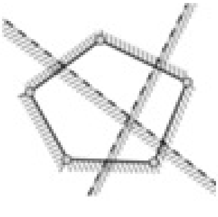
○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Чему равно количество слов, записанное сонным и бодрым студентами, за n минут?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *Воспользуйтесь пунктом* **а)**.

$\boxed{\mathbf{3}}$ У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекают несколько бородатых прямых, у каждой из которых с одной стороны тоже растёт щетина (см. рисунок справа). Эти прямые делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — бородатая снаружи.



Решение. Предположим, что прямые проводятся последовательно: сначала 1-ая, потом 2-ая, и так далее. Первая прямая пересекает многоугольник и делит его на две части. Очевидно, что одна из частей — многоугольник, у которого вся щетина расположена снаружи. Назовем его выделенным. Проведем вторую прямую. Если она пересекает выделенный многоугольник, то одна из его частей (на которые его делит 2-ая пряма) будет с наружной щетиной, а если нет, то можем не рассматривать другие части. Продолжая это рассуждения, мы получим, что хотя бы одна из частей имеет наружную щетину. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Рассмотрите случаи, когда прямых* 1,2 *и* 3.

$\boxed{4}$ Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

Решение. **а)** Очевидно, что для квадрата 2×2 утверждение верно. Предположим, что утвеждение верно для квадрата $2^n \times 2^n$. Докажем, что и для квадрата $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ утверждение тоже верно. Действительно, разделим квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ на 4 квадрата $2^n \times 2^n$. Так как угловая клетка большого квадрата также является угловой клеткой одного из 4-ёх маленьких квадратов, то, по предположению индукции, один из квадратов $2^n \times 2^n$ можно разрезать на трёхклеточные уголки. Оставшиеся три квадрата $2^n \times 2^n$ образуют «угол» в большом квадрате. Вырежем один уголок из центральных клеток исходного квадрата так, чтобы его клетки не принадлежали разрезанному квадрату $2^n \times 2^n$. После его вырезания из каждого квадрата $2^n \times 2^n$, которые не были еще порезаны, пропала одна угловая клетка. Остается воспользоваться еще раз предположением индукции. Таким образом, исходный квадрат разрезан на трёхклеточные уголки. **б)** Доказательство этого пункта проводится ровно также, как и пункта **а)**. ☐

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

• *Проверьте справедливость утверждения для* $n = 1, 2$ *и 3. Как свести задачу с квадратом* $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ *к задаче с квадратами* $2^n \times 2^n$*?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

• *Рассуждайте аналогично пункту* ***а)****.*

$\boxed{\textbf{5}}$ Карточки с числами от 1 до 2017 выложены в ряд в произвольном порядке. Одна из карточек — красная, а остальные — белые. За один шаг можно поменять красную карточку местами с любой другой. Как за несколько шагов расположить числа на карточках по возрастанию?

Решение. Если красная карта не находится на самом дне колоды, то поменяем её с последней. Далее, поменяем её местами с картой, на которой написана единица. После этого 1-ая карта находится на своем месте, а красная расположена выше неё. Поменяем местами красную карту с той, которая находится сразу же над 1-ой. Далее, поменяем местами красную карту с картой, на которой написана двойка. Таким образом, 1-ая и 2-ая карты уже стоят на своих местах. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получаем, что все карты стоят на своем месте, кроме, быть может, красной (если на красной карте написан номер 2017, то она стоит на своем месте). Осталось поставим красную карту на нужное место. Поменяем местами красную карту (она занимает самое верхнее положение) с той, что лежит под ней. Если это место не является местом красной карты, то опускаем её ниже, и так далее. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

• *Как опустить любую карту на одну позицию ниже?*

$\boxed{\textbf{6}}$ Докажите, что все числа в бесконечной последовательности 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, ... делятся на 53.

Решение. Пусть a_n — n-ый член последовательности, то есть $a_1 = 10017, a_2 = 100117$, и так далее. Заметим, что следующий a_{n+1} член последовательности выражается через предыдущий a_n по формуле $a_{n+1} = a_n \cdot 10 - 53$. Так как первый член последовательности делится на 53 ($10017 : 53 = 189$), то, по полученной формуле, второй член тоже делится на 53. Продолжая рассуждать аналогичным образом получаем, что каждый член последовательности делится на 53. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Каким образом можно выразить следующий член последовательности через предыдущий?*

$\boxed{7}$ Докажите, что единицу можно представить в виде суммы 2017 попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

Решение. Начнём с малого: $1 = 1/2 + 1/2$. Теперь представим $1/2$ в виде суммы $1/4 + 1/4$. Продолжая аналогичным образом получаем, что $1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots + 1/2^{2016} + 1/2^{2017}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Воспользуйтесь равенством* $1 = 1/2 + 1/2$.

$\boxed{8}$ **а)** Сколько есть способов разрезать полоску 2×3 на доминошки 1×2? **б)** Тот же вопрос для полосок 2×4 и 2×5. Полоски нельзя переворачивать. **в)** Света посчитала число способов разрезать полоску 2×2018 и вычла из него число способов разрезать полоску 2×2017. А Наташа посчитала число способов разрезать полоску 2×2016. У кого результат вышел больше?

Ответ. **а) 3; б) 5 и 8 соответственно; в) результаты получились одинаковыми.**

Решение. Пусть $p(n)$ — число способов разрезать полоску $2 \times n$ на доминошки 1×2. **а)** Легко видеть, что $p(3) = 3$. **б)** Решение этого пункта сводится к предыдущему: доминошка, одна из клеток которой угловая, может располагаться двумя способами; первый из них дает $p(3) = 3$ способа разрезания, а второй — $p(2) = 2$. Итого $p(4) = p(3) + p(2) = 5$. Аналогично получаем, $p(5) = p(4) + p(3) = 8$. **в)** Как и в предыдущих пунктах, доминошку, которая одной клеткой находится в угле полоски 2×2018, может быть расположена только двумя способами. Поэтому $p(2018) = p(2017) + p(2016)$, то есть $p(2018) - p(2017) = p(2016)$. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Нарисуйте полоску* 2×3. *Как могут располагаться доминошки в углу?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

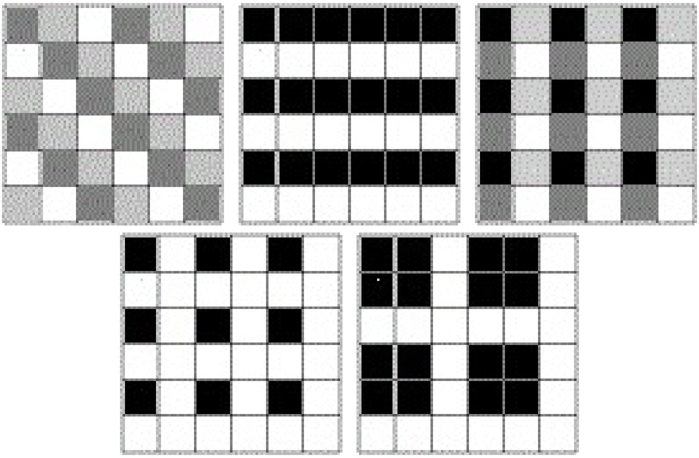
● *Сведите задачу к пункту* ***б).***

○ `Школьник не знает, что делать в пункте в).`

● *Как выражается* $p(n)$ *— число способов разрезать полоску* $2 \times n$ *на доминошки* 1×2 *через* $p(n-1)$ *и* $p(n-2)$*?*

Листок 20. Раскраски

На этом занятии предлагается решить задачи, используя специфику разных раскрасок. Нарисуйте на доске их возможные варианты (см. рис. ниже): диагональная в 3 цвета, тигровая, 4-цветная решётка, окошки и крупные окошки.



диагональная в 3 цвета тигровая 4-цветная решётка окошки крупные окошки

В начале занятия разбирите следующую задачу. Может ли шахматный конь, начав ходить с какой-то клетки шахматной доски, оказаться в той же клетке ровно через 2017 ходов? Не может. Действительно, при шахматной раскраске конь каждым своим ходом меняет цвет клетки, на которой стоит. Поэтому через нечётное число ходов он окажется на клетке другого цвета, чем первоначальная.

$\boxed{\mathbf{1}}$ На каждой клетке доски 7×7 сидит жук. **а)** По команде все жуки одновременно переползают на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом хотя бы в одной клетке будет несколько жуков. **б)** По команде все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что после этого найдётся 7 свободных клеток.

Решение. **а)**На каждой клетке доски 7×7 сидит жук. При шахматной раскраске получаем 25 чёрных и 24 белых клетки (либо наоборот). Жук при переползании меняет цвет. Значит, 25 жуков с чёрных клеток переползут на 24 белые клетки, и хоть в одной из этих клеток будет несколько жуков. **б)** Рассуждаем аналогично пункту **а)**, но с тигровой раскраской. ☐

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Воспользуйтесь шахматной раскраской.*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *Воспользуйтесь тигровой раскраской.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Можно ли из квадрата 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2? **б)** Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2×2 (режут по линиям сетки). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

Ответ. **а) Нельзя.**

Решение. **а)**Расположим «окошки» так, чтобы их в квадрате поместилось 9. В каждом квадрате 2×2 должно быть одно «окошко», значит, квадратов можно вырезать не более 9. **б)** В квадрате 29×29 можно уместить 100 «крупных окошек» (если начинать размещать их от угла). При каждом вырезании квадрата 2×2 повреждается (либо целиком вырезается) ровно одно «окошко». Значит, после вырезания 99 квадратов одно «окошко» останется нетронутым. Его и возьмём в качестве 100-го квадрата. ☐

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

● *Воспользуйтесь обычными окошками.*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

● *Воспользуйтесь крупными окошками.*

$\boxed{\mathbf{3}}$ На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом.

Решение. Покрасим бумагу в 4-цветную решётку. Клетки одного цвета между собой не соприкасаются. Клеток какого-то цвета отмечено хотя бы 500. Действительно, в противном случае всех отмеченных клеток было бы не более $499 \cdot 4 = 1996 < 2000$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Воспользуйтесь 4-цветветной раскраской.*

$\boxed{4}$ В квадрате 5×5 без наложений разместили 8 прямоугольников 1×3. Какая клетка могла оказаться не накрытой ни одним прямоугольником? Найдите все возможные варианты.

Ответ. **Непокрытой могла остаться только центральная клетка.**

Решение. Пример построить легко. Докажем, что другие клетки не могли остаться непокрытыми. Используем 3-цветную диагональную раскраску. Каждый прямоугольник 1×3 содержит по одной клетке каждого цвета. Значит, непокрытой может остаться только клетка того цвета, которого на 1 больше остальных. Среди клеток этого цвета есть не только центральная. Однако, если раскраску повернуть на 90°, то набор клеток этого цвета изменится, и единственная клетка, которая по-прежнему будет окрашена в этот цвет, — как раз центральная. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Воспользуйтесь 3-цветной диагональной раскраской.*

$\boxed{5}$ Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, …, на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Ответ. **5 раз.**

Решение. Покрасим клетки в шахматном порядке: клетки с нечётными числами будут белыми, а с чётными — чёрными. Каждым

прыжком Маша меняет цвет клетки. Более того, она начинает движение с белой клетки, а заканчивает на чёрной. Значит, клеток чёрного и белого цвета на её маршруте будет поровну. В белых клетках она побывает $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ раз, а в чёрных (кроме 10-ой) $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ раз. Значит, в 10-ой клетке она побывает 5 раз. Можно построить соответствующий пример:
12323434545456565676767678787878989898989X9X9X9X9X (X=10). ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Примените шахматную раскраску.*

6 У Коли был набор «Юный паркетчик». В нём было несколько квадратиков 2×2 и несколько тетрамино вида «Т». Из набора Коля без наложений складывал доску 12×12 (и лишних паркетинок не оставалось). Коля потерял один квадратик, и в магазине купил вместо него тетрамино вида «Т». Докажите, что теперь Коля не сможет сложить доску 12×12.

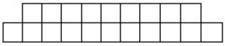
Решение. При шахматной раскраске любой квадратик содержит чётное число чёрных клеток, а любая Т-шка — нечётное. Изначально на доске чёрных клеток 72, значит, Т-шек чётное число. После замены квадратик на Т-шку их станет нечётное число, а значит, и общее число чёрных клеток в них будет нечётным. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Воспользуйтесь шахматной раскраской.*

7 В каждой клетке фигуры, показанной на рисунке, стоит гиря. Из них 18 гирь — настоящие, весящие одинаково. Две — фальшивые, они легче настоящих и, возможно, разной массы. Фальшивые гири расположены в соседних по стороне клетках.

Как за три взвешивания на чашечных весах (без других гирь) узнать, в каких клетках расположены фальшивые гири?



Решение. Раскрасив фигуру в шахматном порядке, заметим, что фальшивые гири стоят на соседних клетках разных цветов. Пусть белых клеток 9, а чёрных 11. За 2 взвешивания найдём белую клетку с фальшивой гирей, а затем за оставшееся взвешивание среди трёх её чёрных соседей найдём вторую фальшивую гирю. Для этого разделим 9 белых гирь на группы по 3 и две группы взвесим; в более лёгкой группе (если она есть) и будет фальшивая гиря, а если группы уравновесились, то лёгкая гиря в третьей группе. Вторым взвешиванием точно так же найдём в более лёгкой группе фальшивую гирю. Третье взвешивание делается аналогично. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Примените шахматную раскраску.*

$\boxed{\textbf{8}}$ На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. В каком наименьшем числе клеток могут оказаться несколько жуков?

Ответ. **Три.**

Решение. Таких клеток будет не меньше трёх. В самом деле, если покрасить доску в тигровую раскраску, то клеток одного цвета будет на 9 меньше, чем клеток другого цвета. Поскольку все жуки меняют цвета клеток, жуков какого-то цвета окажется на 9 больше, чем клеток. При этом 9 «лишних» жуков можно распределить минимум по трём клеткам: в каждую клетку можно приползти не более чем с четырёх других клеток, а на каждую клетку уже приползает один «нелишний» жук. Пример с тремя «переполненными» клетками строится следующим образом. Разбиваем числа на десятки: $1-10, 2-20, \ldots, 91-100$. Стрелки в пределах одной десятки красим в красный цвет, остальные — в синий. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

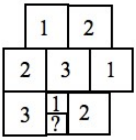
● *Воспользуйтесь тигровой раскраской.*

$\boxed{\textbf{9}}$ Петя и Вася играют на доске 8×8. Каждым ходом Петя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого ещё не окрашены, а Вася красит его в белый, синий или красный цвет так, чтобы граница квадрата не касалась по отрезку клетки того же цвета. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?

Ответ. **Петя.**

Решение. Пусть Петя по очереди выбирает квадраты, показанные на рисунке справа (большие квадраты там размером 2×2, малые — 1×1), в таком порядке: сначала два верхних, потом центральный средний, левый и правый средние, правый нижний, верхний из малых, левый нижний, нижний из малых.

Тогда цвета можно занумеровать так, что Вася должен будет раскрасить квадраты, как показано на рисунке (потому что цвета всех квадратов, начиная с третьего, полностью задаются предыдущей раскраской), и получится, что нижний малый квадрат красить нечем.



□

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Поиграйте в эту игру сами с собой или с соседом по парте. Попробуйте угадать ответ, опираясь на рассмотренные частные случаи игры.*

Листок 21. Найди ошибку

На этом занятии ко всем задачам уже есть решения. Но часть из этих решений содержат ошибки, которые и вам и предстоит найти. При этом некоторые решения верные!

В комментариях ниже к каждой задаче сначала приводится «решение», данное к этой задаче в листочке для школьников, а затем — собственно решение, то есть указание, в чём состоит ошибка в «решении».

В качестве дополнительного задания можно просить школьников исправить неверные утверждения, содержащиеся в условиях задач, и правильно доказать верные.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что: **а)** $2 + 2 = 5$; **б)** $2 \cdot 2 = 5$.

«Решение». **а)** Очевидно, что $0 = 0$. Также очевидно, что $2 \cdot (5 + 5) - 2 \cdot (5 + 5) = 0$ и $5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 0$. Отсюда получаем, что $2 \cdot (5 + 5) - 2 \cdot (5 + 5) = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$. Раскрыв скобки и произведя группировку некоторых слагаемых, получим $2 \cdot (5 - 5) + 2 \cdot (5 - 5) = 5 \cdot (5 - 5)$, или $(2 + 2) \cdot (5 - 5) = 5 \cdot (5 - 5)$. Сократим общий множитель и получим, что $2 + 2 = 5$, что и требовалось доказать. **б)** Из пункта а) следует, что $2 + 2 = 5$, но $2 + 2 = 2 \cdot 2$. Поэтому $2 \cdot 2 = 5$. ☐

Решение. Ошибка в приведённом решении состоит в сокращении на $5 - 5 = 0$ в последнем действии. Этот пример служит хорошей иллюстрацией того, почему на 0 делить нельзя. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Всегда ли можно сократить левую и правую часть равенства на одно и то же число или выражение?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Мальвина сказала Буратино умножить число на 9 и к результату прибавить 15, а Буратино умножил число на 15, а потом прибавил 9, но ответ получил верный. Какое это было число?

«Решение». Обозначим искомое число через x и составим уравнение: $9x + 15 = 15x + 9$. Перенесём x вправо, а числа влево. Получим $24 = 6x$. Отсюда $x = 4$. ☐

Решение. Здесь допущена ошибка при решении уравнения — при переносе слева направо. Если выполнить все действия без ошибок, получим правильный ответ $x = 1$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте самостоятельно решить уравнение, которое записано в «решении».*

3 Если Аня идёт в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она тратит 1,5 часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь у неё занимает 30 минут. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она будет идти пешком?

«Решение». На путь пешком в оба конца плюс путь на автобусе в оба конца уйдёт столько же времени, сколько на два пути пешком и на автобусе. Поэтому на дорогу туда-обратно пешком Аня потратит $2 \cdot 1{,}5 - 0{,}5 = 2{,}5$ часа. ☐

Решение. Приведённое решение верно (хотя, возможно, и не каждый школьник его поймёт после первого же прочтения). ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Решите задачу самостоятельно (возможно, другим способом). Верный ли ответ? А какая часть «решения» кажется неправильной?*

4 Петя с другом пошли в тир. Уговор был такой: Пете даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. Петя стрелял, пока патроны не кончились, и сделал всего 34 выстрела. Сколько раз он попал в цель?

«Решение». У Пети было патронов на 10 выстрелов, а выстрелил он 34 раза, значит, 24 патрона он получил дополнительно. Заметим, что при каждом попадании общее количество патронов у Пети увеличивается на 2: один патрон он тратит на выстрел, но получает три патрона взамен. Значит, Петя попал в цель $24 : 2 = 12$ раз. ☐

Решение. Очевидно, что ответ в «решении» неверный: если бы Петя попал в цель 12 раз, то получил бы за это 36 патронов, то есть даже больше, чем он сделал выстрелов. При этом первое предложение в решении правильное. Ошибка во втором предложении: при каждом попадании количество патронов, которые Петя может истратить, увеличивается не на 2, а на 3. Так что правильный ответ — $24 : 3 = 8$ раз. □

$\boxed{\mathbf{5}}$ Можно ли на доске 10×10 расставить 13 кораблей 1×4 для игры в «морской бой»? Корабли не должны соприкасаться друг с другом ни сторонами, ни углами.

«Решение». Посмотрим, сколько клеточек занимает каждый корабль. Так как он не должен соприкасаться с другими кораблями ни сторонами, ни углами, очертим вокруг него границу шириной в половину клеточки. Таким образом, каждый корабль занимает $4 + 4 + 1 = 9$ клеточек. С другой стороны, доска 10×10 даёт нам $100 + 10 + 10 = 120$ клеточек (с учётом тех самых «границ»). Но $13 \cdot 9 = 117 < 120$. Значит, 13 кораблей расставить можно. □

Решение. В «решении» не учтено, что корабли не могут соприкасаться вершинами, поэтому «границу» надо добавлять ещё и по углам. Тогда площадь одного корабля вместе с границей будет 10 клеток, а доски — 121 клетка. Так что $10 \cdot 13 > 121$, поэтому 13 кораблей расставить на самом деле не удастся. Исходное «решение» неверно ещё и потому, что даже если неравенство было бы «в правильную сторону», это ещё только необходимое условие: из него не следует, что расставить корабли возможно, нужен пример. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Учитывает ли «решение» возможность касания кораблей углами?*

$\boxed{\mathbf{6}}$ В универмаге нарядили несколько новогодних ёлок. На 12 из них есть красные шары, на 11 — жёлтые, на 19 — синие, на 6 — красные и жёлтые, на 8 — красные и синие, на 7 — жёлтые и синие, а на одной — шары всех трёх цветов. Сколько ёлок нарядили в универмаге?

«Решение». Сложим $12 + 11 + 19 = 42$. При этом мы посчитали ёлки, на которых висят шары двух цветов, по два раза. Вычтем их количества из полученной суммы по одному разу: $42 - 6 - 8 - 7 = 21$. Теперь никакие ёлки не посчитаны дважды. Однако теперь получается, что ёлку с шарами всех трёх цветов мы сначала три раза посчитали, а потом три раза вычли, то есть она у нас сейчас не учтена вовсе. Добавив её, получим $21 + 1 = 22$ ёлки. □

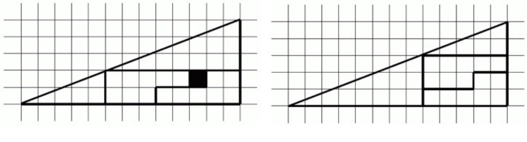
Решение. Решение верное, а вот условие задачи некорректно. В самом деле, если посчитать количество ёлок, на которых есть красные шары и ещё какие-нибудь, то получится $6 + 8 - 1 = 13 > 12$. Причём эту ошибку в условии скорее заметят те школьники, которые не станут сразу применять формулу включений-исключений, как это сделано в «решении», а сначала посчитают, сколько ёлок с шарами ровно одного и ровно двух цветов (для каждого цвета в отдельности). □

○ `Школьник не знает, что делать`

● *Как посчитать количество ёлок, на которых висят красные и жёлтые шары, но не висят синие?*

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что $64 = 65$.

«Решение». Разрежем треугольник с дыркой площадью 64 клетки на части и сложим треугольник без дырки площадью 64 клетки (см. рисунок). Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин катетов, то есть сторон, прилежащих к прямому углу. Это следует из того, что такой треугольник составляет половину прямоугольника, стороны которого равны катетам треугольника.



□

Решение. Большой треугольник на обоих рисунках на самом деле треугольником не является. Две из его частей, имеющие форму прямоугольных треугольников, имеют неравные углы (например, видно, что у них неравные, хотя и довольно близкие, тангенсы: $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$). ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Все ли «стороны» большого треугольника являются прямыми линиями?*

8 В воскресенье вечером одноклассники звонили друг другу, чтобы узнать домашнее задание. Известно, что каждый ответил по крайней мере на 10 звонков. Также известно, что никакие два одноклассника не разговаривали друг с другом за вечер больше одного раза. Какое наименьшее количество учеников может быть в классе?

«Решение». Возьмём одного человека. Ему позвонили ещё минимум 10 разных людей (пусть это будут 2-й, 3-й, 4-й, $\ldots$, 11-й); итого уже 11 человек. Возьмём второго. Первый ему звонить уже не может — они уже поговорили. Пусть ему позвонят все с 3-го по 11-го — это 9 человек; тогда нужен ещё 12-й, чтобы второму позвонили 10. (Если второму позвонят не все с 3-го по 11-го, то придётся добавить больше новых людей, тогда и общее количество не будет минимальным.) Продолжая эти рассуждения дальше, получим, что требуется минимум 21 человек. ☐

Решение. А вот здесь даже ответ получился верный, но решение неправильное: непонятно, почему если на каждом шаге добавлять минимально возможного одного человека, получается действительно наименьшее возможное общее количество человек. Почему не лучше сначала добавлять больше человек, а потом в какой-то момент за счёт этого сильно сэкономить? То, что описано в «решении» — это на самом деле способ построения оптимального примера: расставим 21 человек по кругу, и пусть каждому позвонят 10 следующих за ним по часовой стрелке. Оценка делается так: пусть в классе n учеников. Тогда максимальное количество звонков (при условии, что каждые двое разговаривали не больше одного раза) равно $n(n-1)/2$, а минимальное равно $10n$. Отсюда $n(n-1)/2 \geqslant 10n$, то есть $n \geqslant 21$. Кроме того, «решение» содержит только «оценку», а явного указания на пример там нет. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Верно ли, что если на каждом шаге добавлять минимально возможного одного человека, получается действительно наименьшее возможное общее количество человек?*

Листок 22. Десятичная запись

В начале занятия следует рассказать/напомнить школьникам о смысле десятичной записи числа: десятичная запись — это на самом деле запись разложения числа по степеням десятки. Например, $12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

Полезное свойство десятичной записи числа состоит в том, что последняя цифра суммы (произведения) двух чисел равна последней цифре суммы (произведения) последних цифр этих двух чисел (то же самое верно и для любого числа слагаемых/сомножителей).

Кроме этого, по одной или нескольким последним цифрам в десятичной записи числа можно проверять его делимость на 2, 5, 10, 4, 25, 100, $\ldots$, 2^n, 5^n, 10^n,…Например: $123456 = 123400 + 56 = 1234 \cdot 100 + 56 = 1234 \cdot 2^2 \cdot 5^2 + 56$. Первое слагаемое делится на 4, 25 и 100, поэтому делимость исходного числа на 4, 25 и 100 зависит от делимости числа 56 на 4, 25 и 100. В данном примере 56 делится на 4, но не делится на 25 и на 100. Поэтому исходное число делится на 4, но не делится на 25 и на 100. Вообще, *натуральное число делится на $2^n, 5^n, 10^n$ тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на $2^n, 5^n, 10^n$ соответственно.* Доказать это в общем случае можно аналогично приведённому примеру (но рассказывать школьникам доказательство в общем виде не нужно).

$\boxed{1}$ И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три числа a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Тогда отгадай, какие цифры x, y, z я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой!» Опечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

Ответ. **Может.**

Решение. Поскольку Кощей задумал цифры, Иван-Царевич может назвать, например, числа 100, 10 и 1. Тогда полученное трёхзначное число и будет состоять из загаданных цифр. ☐

```
○ Школьник не знает, что делать.
```

● *Обратите внимание, что Кащей задумал не числа, а цифры.*

$\boxed{\textbf{2}}$ Напишите наименьшее натуральное число, составленное из всех возможных различных цифр и делящееся без остатка на 5.
Ответ. **1023467895.**

Решение. Данное число будет наименьшим, так как в более старших разрядах стоят максимально маленькие возможные цифры. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Чем выше разряд, тем меньшую цифру туда надо ставить. Ноль нельзя ставить на первую позицию. И необходимо добиться делимости на 5. Какой признак делимости на 5?*

$\boxed{\textbf{3}}$ Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 4?
Ответ. **Да.**

Решение. Например, 39 и 40. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Всегда ли сумма цифр двух соседних натуральных чисел отличается на 1? Когда это не так?*

$\boxed{\textbf{4}}$ Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.
Ответ. **49999.**

Решение. Первое число должно иметь на конце 9, так как иначе сумма цифр изменится на 1, и новая сумма цифр не будет делится на 5. Если происходит добавление 1 к числу с n цифрами 9 на конце (а $(n+1)$-я цифра с конца не 9), то сумма цифр уменьшается на $9n-1$. Если сумма цифр делилась на 5, то и новая сумма цифр, уменьшенная на $9n-1$, должна делиться на 5, то есть $9n-1$ должно делиться на 5. Наименьшее n, для которого это верно, $n=4$. Отсюда наименьшее число с указанным выше свойство 49999. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Первое число должно иметь на конце* 9. *Как меняется сумма цифр при добавлении единицы, которая «заберёт» n девяток?*

$\boxed{\mathbf{5}}$ К задумчиво стоящему на тротуаре человеку, а им оказался математик, подошёл милиционер. «Вы не обратили внимания на номер проехавшего сейчас самосвала?» — спросил он. «О, да! У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них» — таков был ответ математика. Какой же номер у самосвала?

Ответ. **5445.**

Решение. Из условия следует, что номер самосвала имеет вид $\overline{ABBA}$, при этом $\overline{AB} + \overline{BA} = A + B$. Представим всё в виде суммы разрядных слагаемых и напишем уравнение с двумя неизвестными: $10A + B - 10B - A = A + B$. Получаем уравнение $8A - 10B = 0$ или, сократив общий множитель, $4A - 5B = 0$. При этом $0 \leq A, B \leq 9$ и $A, B \in \mathbb{N}$. Поэтому простым перебором получаем, что возможны случаи $A = B = 0$ и $A = 5, B = 4$. Так как номера 0000 не бывает, то номер был 5445. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Напишите номер в виде букв, а потом разложите в сумму разрядных слагаемых полученные выражения.*

$\boxed{\mathbf{6}}$ Найдите двузначное число, обладающее следующим свойством: если зачеркнуть его последнюю цифру, то получится число в 14 раз меньшее.

Ответ. $14; 28$.

Решение. Подходят только 14 и 28, других нет. Докажем это. Предположим, что есть число вида $\overline{ab}$, где $a > 2$. При зачёркивании последней цифры мы получим число a. Представим 14 в виде суммы разрядных слагаемых: $14 = 10 + 4$. При умножении получаем следующее: $14 \cdot a = 10a + 4a$. Если $a > 2$, то мы получим число, которое будет больше, чем $\overline{a9}$, отсюда выполнение требуемого условия невозможно. □

○ Школьник не знает, что делать.

● *Скольки значное число получится при зачёркивании последней цифры двузначного числа? Представьте число* 14 *в виде суммы разрядных слагаемых.*

$\boxed{7}$ Шестизначное число начинается с цифры 2. Откинув эту цифру слева и написав её справа, получим число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

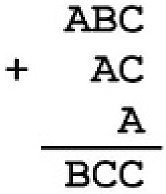
Ответ. 285714**.**

Решение. Запишем шестизначное число как $200000 + $. После переноса 2 в конец, получаем число $10x + 2$. Так как оно в 3 раза больше первоначального, получаем следующее уравнение: $10 + 2 = 3 \cdot (200000 +)$. Решая данное уравнение, получаем $x = 85714$. А первоначальное число будет 285714. ☐

○ Школьник не знает, что делать.

● *"Отщепите"первую цифру в сумму разрядных слагаемых. Составъе уравнение.*

$\boxed{8}$ Решите ребус (здесь разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми буквами — одинаковые.):



$$\begin{array}{r} ABC \\ +\quad AC \\ A \\ \hline BCC \end{array}$$

Ответ. $674 + 64 + 6 = 744$**.**

Решение. Рассуждать можно так: $100A + 10B + C + 10A + C + A = 100B + 10C + C$. Складываем A Слева и сокращаем C Слева и Справа: $110A+10B+(A+C) = 100B+10C$, $(11A+B)\cdot 10+(A+C) = (10B+C)\cdot 10$. Все Слагаемые, кроме $(A+C)$, делятся на 10. Значит, $A + C = 10; C = 10 - A$. Кроме того, Слева в сотнях A, а справа B, значит, $B = A + 1$, $(11A + A + 1) \cdot 10 + 10 = 100(A + 1) + 10(10 - A)$, $(12A + 1) \cdot 10 + 10 = 100A + 100 + 100 - 10A$, $120A + 20 = 90A + 200$, $30A = 180$, $A = 6; B = A + 1 = 7; C = 10 - A = 4$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Можно постепенно подсказывать шаги решения.*

$\boxed{\textbf{9}}$ Когда число ПОТОП умножили на 99999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом ПОТОП?

Ответ. **51715.**

Решение. В формулах для удобства слово ПОТОП будем писать как $\overline{POTOP}$. Представим число 99999 в виде $100000-1$. Тогда умножение представляется в виде $\overline{POTOP} \cdot (100000-1) = \overline{POTOP00000} - \overline{POTOP}$. Вычитая в столбик, получаем по уравнениею на каждую из трёх букв P, O и T. Получаем следующее: $10 - P = 5, 9 - O = 8, 9 - T = 2$, отсюда искомое числое есть 51715.

Также возможно второе решение, более сложное и менее красивое: так как результат произведения оканчивается на 5, то число $\overline{POTOP}$ оканчивается на 5 (так как 99999 не оканчивается на 5), то есть $P = 5$. Далее производим умножение в столбик и получаем на букву O следующее уравнение: $9O+4+5 = \overline{X8}$, где X - какие-либо цифры. Из небольшого перебора и того, что $0 \leq O \leq 9$ получаем, что $O = 1$. Аналогично продолжая умножать, получаем уравнение $9T+1+3+5 = \overline{Y2}$, где Y какие-либо цифры. Аналогично получаем, что $T = 7$. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте делать вычисления в столбик, что получится? Попробуйте представить число 99999 в каком-либо другом виде.*

$\boxed{\textbf{10}}$ Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых уменьшится в 3 раза, если само число увеличить на 3.

Ответ. **108, 207, 117.**

Решение. Представим число в виде суммы разрядных слагаемых $100a + 10b + c$. При этом $a, b, c \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant a, b, c \leqslant 9, a \neq 0$. Числа $999, 998, 997$ не подходят, что можно проверить. Отсюда у нас есть два случая. Первый: $c < 7$, тогда при добавлении 3 в разряд десятков 1 не переходит. И $c > 6$, когда переходит. Отсюда получаем на каждый случай по уравнению:

$$\left[\begin{array}{c} a+b+c=3(a+b+c+3), c\leqslant 6,\\ a+b+c=3(a+b+1+c-7), c>6.\end{array}\right.;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c} a+b+c=3(a+b+c)+9, c\leqslant 6,\\ a+b+c=3(a+b+c)-18, c>6.\end{array}\right.;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c} 2(a+b+c)=-9, c\leqslant 6,\\ 2(a+b+c)=18, c>6.\end{array}\right.;\Rightarrow\left[\begin{array}{c} a+b+c=-4{,}5, c\leqslant 6,\\ a+b+c=9, c>6.\end{array}\right..$$

Так как сумма цифр не может быть дробным числом, получаем, что $a+b+c=9$ и $c>6$. Отсюда получаем все возможные случаи небольшим перебором:

- $c=9, a+b=0, a=0$, случай не подходит, так как $a\neq 0$
- $c=8$, отсюда $a+b=1$, откуда $a=1, b=0$.
- $c=7, a+b=2$, откуда либо $a=2, b=0$, либо $a=1, b=1$.

☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Представьте число в виде суммы разрядных слагаемых. Попробуйте записать условие задачи в этом виде. Какие случаи последней цифры надо рассмотреть?*

$\boxed{\mathbf{11}}$ Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

Ответ. 227.

Решение. Произведение равно $2999x=(3000-1)x=3000x-x$, где $x=11\ldots11$ (100 единиц). Число $3000x$ равно $3000\cdot 11\ldots 11=33\ldots 33000$ (здесь 100 единиц и 100 троек). Вычислим разность $3000x-x$ (т.е. произведение): $33\ldots 33000-11\ldots 11=33322\ldots 221889$ (здесь 100 троек, 100 единиц и 96 двоек). Отсюда сумма цифр равна $3\cdot 3+2\cdot 96+1+8\cdot 2+9=227$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Представьте число* $2999 = 3000 - 1$. *Теперь умножайте каждое из этих чисел на число из 100 единиц.*

Листок 23. Оценка+пример

В начале занятия следует пояснить, что в этом листочке требуется не только найти правильный ответ и построить для него пример, но и доказать с помощью оценки, что пример лучше действительно построить нельзя. Также имеет смысл разобрать простую задачу. Например: какое наименьшее число ладей могут побить всю шахматную доску? Оценка: Если на какой-то горизонтали нет ладьи, то чтобы побить всю эту горизонталь нужно, чтобы в каждой вертикали стояло по ладье, т.е. их было не меньше 8. А если на каждой горизонтали есть ладья, то их тоже не меньше восьми. Пример: 8 ладей на главное диагонали.

$\boxed{\textbf{1}}$ Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

Ответ. **21.**

Решение. Оценка: $64 = 3 \times 21 + 1$, значит, больше 21 уголка вырезать не получится. Пример дети нарисуют сами. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько всего у нас клеточек? А сколько клеточек в уголке? Сколько тогда уголков может влезть?*

$\boxed{\textbf{2}}$ **а)** 8 кузнецов должны подковать 10 лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите: лошадь не может стоять на двух ногах!) **б)** А если кузнецов 48, а лошадей 60?

Ответ. **а), б) 25 минут.**

Решение. **а)** У 10 лошадей 40 ног, следовательно потребуется хотя бы $40 \times 5 = 200$ рабочих минут на 8 кузнецов. То есть, если все кузнецы будут работать без перерывов, они потратят на все подковы $200 : 8 = 25$ минут. Пример: сначала кузнецы подковывают $1 - 8$ лошадям по 1 копыту, это 5 минут, затем — $3 - 10$ лошадям по одному копыту, это еще 5 минут, после — $1 - 2$ и $5 - 10$, $1 - 4$ и $7 - 10$, и наконец, $1 - 6$ и $9 - 10$. Итого 5×5 минут. **б)** Оценка: $60 \times 4 \times 5 : 48 = 25$ минут. Пример строится аналогично прошлому пункту. Первые 8 кузнецов подковывают первых 10 лошадей и так далее. □

○ Ученик не знает, что делать.

● *За сколько бы подковал всех один кузнец? А теперь пусть их 8, сколько тогда? А как это реализовать?*

3 **а)** В магазине приходится взвешивать на весах товары массой в целое число килограммов — от 1 до 15 кг. Какое наименьшее число гирь должно быть для этого в магазине, если гири кладутся на одну чашку весов, а продукты на другую? **б)** А какое наименьшее число гирь должно быть в магазине, где взвешивать нужно товары целой массой от 1 до 40 кг, но гири можно класть на обе чашки весов?

Ответ. **а), б) 4.**

Решение. . **а)** Оценка: имея n гирь различного веса, можно отвесить по указанным правилам $2^{n}\breve{}1$ различных весов (используя или не используя каждую гирю; не использовать ни одной гири нельзя, так как на другой чаше весов лежит хотя бы 1 кг товара). При $n < 4$ получается менее 15 различных комбинаций гирь. Пример: подходят гири 1, 2, 4 и 8 кг. **б)** Оценка: докажем, что трёх гирь не хватит. Пусть массы гирь $a < b < c$. Тогда с помощью гирь массы a и b можно получить максимум 4 веса: $a, b, a+b, b\breve{}a$; затем, прибавляя эти веса к весу c и вычитая их из него, получим ещё не больше 9 весов(считая сам вес c); итого не более 13 различных весов (часть из них могут совпадать). Но нам нужно 40, значит, понадобится хотя бы 4 гири. Пример: подходят гири 1, 3, 9, 27. Проверить это можно так: с помощью гирь 1 и 3 делаются веса от 1 до 4, прибавляя/вычитая их к/из 9, получим ещё все веса от 5 до 13, прибавляя/вычитая ранее полученные веса к/из 27, получим все веса от 14 до 40. □

○ Ученик не знает, что делать.

● *Попробуем взять две гири. Сколько разных весов мы сможем получить с их помощью? А если добавить третью?*

4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8 × 8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: **а)** в любом квадратике 2×2; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

Ответ. **а) 16; б) 32.**

Решение. Разобьём квадрат на 16 квадратиков 2×2. **а)** Оценка: в каждом из них должна быть хотя бы одна закрашенная клетка, значит, меньше 16 клеток закрасить не получится. Пример: в каждом из 16 квадратиков 2×2 закрасим левую верхнюю клетку. Ясно, что этого будет достаточно. **б)**Оценка: в каждом квадратике придется закрасить не меньше двух клеток, так как иначе в квадратике останется уголок без черных клеток. Пример: можно целиком покрасить строчки через одну или раскрасить доску в шахматном порядке. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай попробуем сначала решить ту же задачу для квадрата* 2×2. *А теперь* 4×4. *А как доказать, что там нельзя обойтись меньшим количеством клеток?*

$\boxed{5}$. В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

Ответ. **9.**

Решение. Оценка: заметим, что не могло остаться 0 щук, так как последнюю щуку будет некому есть. То есть, съедено было не больше 29 щук. Но $29 = 3 \times 9 + 2$, значит, больше 9 наевшихся щук не могло получится. Пример: пусть первая щука съела любых трех; вторая — первую и еще любых двух из оставшихся; третья — вторую и любых двух из оставшихся; и так дажее. Таким образом, мы получим 8 съеденных сытых щук и 17 съеденных голодных щук. Живыми же останутся одна сытая и две голодные. □

● *Мало показать пример, где наелось 9 щук, и сказать, что на десятую уже не хватит. Нужно доказать это более строгой оцен-*

кой. Иначе возникает вопрос: а вдруг они ели друг друга в другом порядке и наелись каким-то образом раньше.

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай сначала придумаем пример. А можно ли накормить больше щук? Если нельзя, то как это доказать? Сколько щук должно быть съедено, чтобы наелось больше щук, чем в нашем примере?*

6 . У каждого из 222 семиклассников школы не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Какое наименьшее количество классов понадобится, чтобы обеспечить бесперебойную работу всех семиклассников?

Ответ. **3.**

Решение. Оценка: так как может найтись трое школьников, которые являются друг другу близкими приятелями, двух аудиторий точно не хватит. Пример: сначала рассадим все такие тройки приятелей. Так как близких приятелей у каждого не больше двух, то наши трое могут дружить только между собой. Тогда мы просто рассадим их в три разные аудитории, больше они ни с кем болтать не будут. Теперь возьмем любого из оставшихся школьников. Если у него близких приятелей в школе нет, посадим его в любой из классов и перейдем к следующему школьнику. Если они есть, то их не больше двух, значит, обязательно найдется класс, в котором не сидит ни одного приятеля нашего школьника. Посадим его в этот класс. И так далее. Таким образом, каждого школьника посадили в класс, в котором нет его близких знакомых, что нам и требовалось. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Может ли хватить двух аудиторий? А трех? Пусть нам нужно рассадить только несколько школьников по этим аудиториям. Как это сделать? А теперь пришел опоздавший Вася. Нас есть, куда его посадить?*

7 На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка

прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Какое минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?
Ответ. **20 минут.**

Решение. Оценка: для начала заметим, что если кто-то из математиков проехал на самокате меньше 1000 метров, то пешком он пройдет больше 2000 метром, тогда дорога займет у него больше 20 минут. Теперь заметим, что чтобы время прохождения дистанции всеми участниками уменьшить, нужно, чтобы все участники проехали на самокате больше 1000 метров. Но длина всей дистанции 3000 метров. Значит, кому-то из математиков точно придется возвращаться на самокате обратно, а часть дистанции заново проходить пешком. Но на это он потратит больше времени, чем если бы сразу оставил самокат и пошел с того же места пешком. Значит, возвращение обратно общее время прохождения не улучшит. Пример: первый едет треть пути на самокате, бросает его, бежит дальше. Второй бежит треть пути, хватает валяющийся самокат, едет треть пути, бросает, бежит дальше. Третий бежит две трети пути, хватает самокат и финиширует одновременно с первым и вторым. В итоге каждый треть пути едет и две трети бежит, таким образом, через 20 минут все финишируют. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько времени один математик потратит на всю дистанцию, если будет только бежать? А все трое вместе? А если только ехать? А если один будет только ехать, а двое только бежать? А они могут на троих потратить времени меньше?*

$\boxed{8}$ На какое наибольшее количество разных прямоугольников можно разрезать по линиям сетки: **а)** прямоугольник 5×6 клеточек; **б)** прямоугольник 12×6 клеточек; **в)** прямоугольник 2×36 клеточек?
Ответ. **а) 7; б) 13; в) 12.**

Решение. Сначала посмотрим, какие вообще бывают прямоугольники с маленькими площадями. Есть ровно по одному прямоугольнику с площадями 1, 2, 3, 5, 7, 11, и так далее. По два — с площадями $4(1 \times 4$ и $2 \times 2)$, $6(1 \times 6$ и $2 \times 3)$, 8, 9, и так далее. Итак, минимальные возможные площади различных прямоугольников: 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, и так далее. Перейдем к нашим пунктам: **а)**$5 \times 6 = 30 < 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6$, значит, на 8 различных прямоугольников разрезать точно не получится. Для 7 можно построить пример. **б)** Аналогичным образом получаем, что этот прямоугольнико можно разрезать не более, чем на 13 различных. **в)** Здесь нам подходят только прямоугольники, у которых одна из сторон состоит не более, чем из 2 клеточек, например, нам не подходит прямоугольник 3×3. И тогда мы получаем оценку 12. Пример, опять же, можно построить. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какие вообще бывают маленькие прямоугольники? Давай их все перечислим. А сколько из них влезут в наш большой прямоугольник?*

Листок 24. Линейные функции и графики

Если дети слабые, то в начале занятия можно объяснить как строить график прямой $y = kx + b$, а также как коэффициенты k и b влияют на этот график.

$\boxed{1}$ При каких k и b график линейной функции $y = kx + b$:

а) проходит через начало координат;

б) проходит через начало координат и точку $M(-1; 3)$;

в) параллелен графику функции $y = 3x + 5$;

г) отсекает на осях координат равные отрезки;

д) является биссектрисой координатного угла третьей четверти;

е) проходит через точки $M(3; 8)$ и $N(4; 8)$;

ж) параллелен прямой $3x + 2y = 7$ и пересекается с прямой MN из п. е) на оси Oy;

з) проходит только через те точки, координаты которых — одного знака;

и) не проходит через точки, обе координаты которых положительны?

Постройте такие графики. В каких пунктах решение не единственно?

Ответ. **а) $b = 0$ при любом k.**

б) $b = 0, k = -3$.

в) $k = 3, b \neq 5$ (если считать, что совпадение прямых не является случаем, когда они параллельны, иначе b любое).

г) $k = \pm 1, b$ — любое.

д) $b = 0, k = 1$.

е) $k = 0, b = 8$.

ж) $k = -3/2, b = 8$.

з) $b = 0, k$ — любое.

и) $k \leqslant 0, b \leqslant 0$.

Решение не единственно в пунктах а), в), г), з), и).

Решение. **а)** Для того, чтобы график проходил через начало координат, ему должна принадлежать точка (0,0). Подставим её в уравнение и получим $b = 0$ при любом k.

б) Аналогично предыдущему пункту, подставим две точки и получим систему уравнений, из первого уравнения $b = 0$, а из второго $3 = -k$, то есть $k = -3$.

в) На наклон прямой (угол между прямой и любой осью координат) влияет только k, тогда как b влияет на параллельный перенос прямой, отсюда $k = 3$, а $b \neq 5$ (если считать, что совпадение прямых не является случаем, когда они параллельны, иначе b любое).

г) При отсечении равных отрезков мы получаем равнобедренный прямоугольный треугольник, то есть углы при основании равны по 45 градусов, такое возможно только при $k = \pm 1$ и любом b.

д) В этом случае он является ещё и биссектрисой координатного угла первой четверти, то есть отсекает угол 45 градусов, это возможно только при $b = 0$ (проходит через начало координат) и $k = 1$ (угол 45 градусов).

е) Подставим точки в уравнение и решим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, где уравнения: $8 = 3k + b$ и $8 = 4k + b$, откуда $k = 0, b = 8$.

ж) Выразим y, получим $y = 7/2 - - -3/2x$, откуда для выполнения условия параллельности $k = -3/2$, а точку b надо найти из условия прохождения через точку на оси Oy, найдём эту точку. Уравнение прямой из предыдущего пункта: $y = 8$, то есть точка на оси Oy есть $(0, 8)$, подставим её в наше уравнение $y = -3/2x + b$, получим $8 = -3/2 \cdot 0 + b$, откуда $b = 8$.

з) Если прямая проходит через начало координат, то она проходит только через третий и первый квадранты, или только через второй и четвёртый квадранты, которые как раз и содержат координаты одного знака (считаем, что ноль имеет знак и плюс, и минус). Если же прямая проходит не через начало координат, то она проходит через три разных квадранта, то есть условие задачи не соблюдается. Отсюда ответ $b = 0, k$ — любое.

и) В этом случае прямая не должна проходить через первый квадрант, отсюда $k \leqslant 0$. Если $b > 0$, то прямая «поднимается» вверх, то есть будет проходить через первый квадрант, отсюда $b \leqslant 0$.

Построение графиков является простой процедурой. Не единственно решение в тех пунктах, где не фиксировано либо k, либо b. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *У нас есть уравнение и точки. Как можно найти неизвестные коэффициенты? Как влияет b на прямую? А k? Попробуйте разные случаи.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** При каких k и b графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ не пересекаются? совпадают? пересекаются в одной точке? **б)** В последнем случае найдите абсциссу точки пересечения.

Ответ. **а) Не пересекаются при $k = b$, тогда же и совпадают, иначе пересекаются в одной точке. б) $x = 1$.**

Решение. **а)** Не пересекаются при $k = b$, так как для параллельности требуется равный угловой коэффициент, но при $k = b$ мы получаем одинаковые уравнения, поэтому эти две прямые ещё и совпадают, иначе пересекаются в одной точке, так как они не параллельны и не совпадают. **б)** *Первый способ.* Искомая абсцисса является решением уравнения $kx+b = bx+k$. Это уравнение приводится к виду: $(k\breve{\ }b)x = k\breve{\ }b$. Так как данные графики пересекаются (не совпадают), то $k \neq b$, поэтому $x = 1$.
Второй способ. Заметим, что $x = 1$ является решением задачи: при $x = 1$ обе заданные линейные функции принимают одно и то же значение $y = k + b$. Так как их графики пересекаются, то есть эти прямые имеют ровно одну общую точку, то других решений нет. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Когда прямые параллельны? А когда совпадают? А если не параллельны и не совпадают, то что можно сказать про их пересечение?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ При каких a, b, c, d график функции $y = ax + b$ перпендикулярен к графику функции $y = cx + d$?
Ответ. **$a = -1/c$.**

Решение. Очевидно, что от b и d это не зависит, так как эти два коэффициента влияют только на параллельный перенос прямых. Рассмотрим прямую, перпендикулярную прямой с угловым коэффициентом a. Для удобства будем считать, что все свободные члены равны 0. Угол между прямой $y = cx$ с осью ординат равен углу между прямой $y = ax$ с осью абсцисс. То есть если мы «поменяем» местами оси координат (будем считать ось ординат осью абсцисс, а ось абсцисс осью ординат) и напишем уравнение второй прямой в новой системе координат, мы получим уравнение $x = -ay$. Приведём его к виду для первой системы координат: $y = -1/a \cdot x$, то есть $c = -1/a$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Влияют ли свободные члены на угол между прямыми? Как связаны угловые коэффициенты прямых, если они перпендикулярны? Какой угол между второй прямой и осью ординат? Попробуйте мысленно "поменять" оси местами.*

$\boxed{4}$ Постройте графики функций: **а)** $y = 5x$; **б)** $y = -3x$; **в)** $y = 5x - 5$; **г)** $y = -3x + 5$; **д)** $y = \frac{1}{3}x$; **е)** $y = -\frac{1}{7}x + 4$.

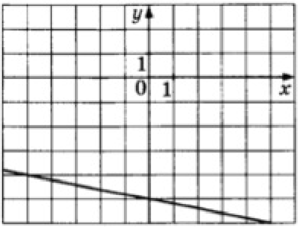
Решение. Построение графиков является простой процедурой. Желательно строить не по точкам, а с понимание, как коэффициенты влияют на прямую. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

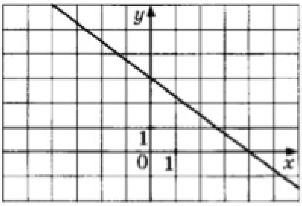
● *Попробуйте понять, какой будет угол наклона при разных угловых коэффициентах. Как влияет свободный член на прямую?*

$\boxed{5}$ Определите линейные функции по их графикам (см. рис.).

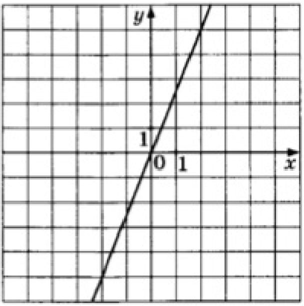
а)



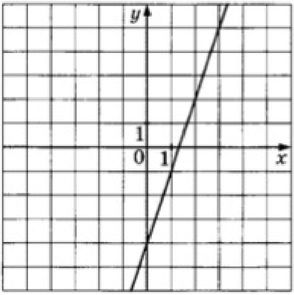
б)



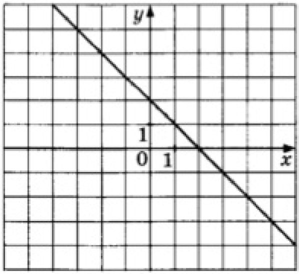
в)



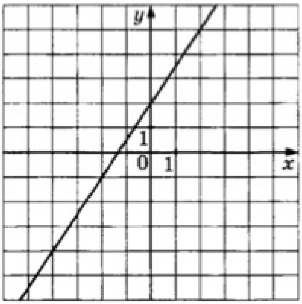
г)



д)



е)



Решение. В каждом пункте берутся две точки с прямой, подставляются в уравнение $y = kx + b$ и решается уравнение на k и b. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте написать системы уравнений. А может, можно сразу узнать, чему равен свободный коэффициент, просто посмотрев на график?*

$\boxed{\textbf{6}}$ Изобразите все точки на плоскости (x, y), для которых: **а)** $x = 5$; **б)** $x + y = 2$; **в)** $x \geqslant y$; **г)** $x \geqslant y + 3$; **д)** $x + y \geqslant 3$; **е)** $2x \leqslant y$; **ж)** $xy = 0$.

Решение. В каждому пункте необходимо построить прямые ("рамку"вокруг областей), а дальше в зависимости от знаков брать полуплоскости. В последнем пункте всё следует из того, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один множитель равен нулю, отсюда это будет пересечением двух координатных прямых. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте нарисовать прямые. А что даёт неравенство?*

$\boxed{7}$ Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов по Цельсию и Фаренгейту?

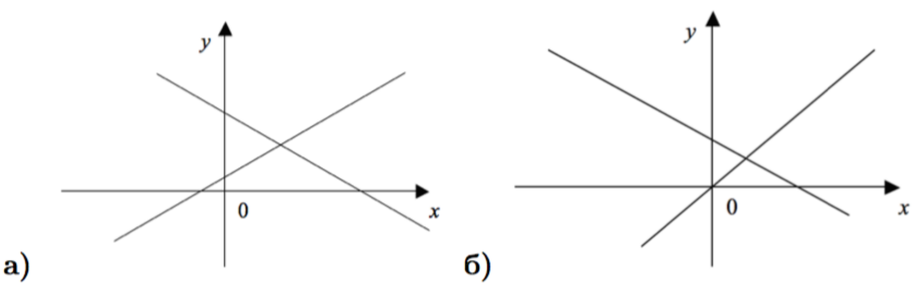
Ответ. **Да, при $T_C = -40°$.**

Решение. Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32°$. Если $T_F = T_C$, то $0{,}8T_C + 32° = 0°$, то есть, $T_C = -40°$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте написать, как выражается одна шкала через другую. Также можно заметить, что прямые с разными угловыми коэффициентами пересекаются и не искать T_C.*

$\boxed{8}$ На каждом рисунке изображены графики двух линейных функций (см. рис.). Могут ли это быть графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$?



Ответ. **В обоих случаях нет.**

Решение. На первом рисунке не может, так как у прямых угловой коэффициент разных знаков (а значит и свободные члены разных знаков), значит одна прямая должна пересекать ось ординат ниже нуля, а другая — выше, а они обе пересекают выше. На втором рисунке не может, так как одна прямая проходит через начало координат, то есть свободный коэффициент равен 0, тогда как у второй прямой угловой коэффициент 0 не равен. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте посмотреть на свободные члены и угловые коэффициенты. Что особенного можно сказать про одну из прямых на втором рисунке?*

Листок 25. Эскалаторы и течения

По этой теме ничего особенного рассказывать не требуется.

$\boxed{\textbf{1}}$ Однажды человек опаздывал на работу и, чтобы наверстать потерянное в пробке время, побежал вниз по эскалатору метро. Спускаясь со скоростью две ступени в секунду, он насчитал сто сорок ступеней. Через день ситуация повторилась, но теперь ему грозило большее опоздание. Естественно, по тому же эскалатору он бежал быстрее — со скоростью три ступени в секунду, а насчитал на двадцать восемь ступенек больше. Странно получилось: чем быстрее бежишь, тем длиннее эскалатор. Сколько же всего ступенек на нём?

Ответ. 280 **ступенек.**

Решение. Если общее количество ступеней на открытой части эскалатора обозначить через N, то при движении вниз оно будет складываться из количества ступеней, на которые опустился сам эскалатор, и количества ступеней, пройденных по нему. В первом случае время движения составило $140/2 = 70$ секунд, во втором — 56 секунд. Для постоянной скорости эскалатора v указанные соображения приводят к уравнениям: $140 + 70v = N, 168 + 56v = N$, решение которых $N = 280$ ступеней и $V = 2$ ступени в секунду. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте обозначить через неизвестную общее количество ступенек на эскалаторе. Составьте уравнения.*

$\boxed{\textbf{2}}$ Петя сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

Ответ. 42 **ступеньки.**

Решение. Представьте себе, что Вы бежите вниз по движущемуся вниз эскалатору. В то время, как Вы преодолеваете одну ступеньку, под землю, вниз уходят x ступенек. Вам осталось пройти на $x + 1$ ступеньку меньше. Когда Вы сделали 30 шагов, вниз провалились и пропали $30x$ ступенек. Если бы они не проваливались, то есть эскалатор бы стоял на месте, то Вы прошли бы все $30 + 30x$ ступенек сами. Это и есть длина эскалатора. Теперь представьте себе, что Вы бежите вверх по тому же самому эскалатору. Вы делаете шаг, а в это время навстречу Вам появляется сверху x ступенек. Вы приблизились к цели всего на $1 - x$ ступенек. За 70 Ваших шагов сверху успели появиться лишние $70x$ ступенек. Если бы эскалатор стоял, Вам не пришлось бы их преодолевать, т.е. длина эскалатора $70 - 70x$ шагов. В результате получаем простое уравнение $30 + 30x = 70 - 70x$, откуда $x = 0{,}4$. Если бы x оказался бы больше единицы, Вам не удалось бы подняться совсем. Длину эскалатора теперь найти несложно: $30 + 30 \cdot 0{,}4 = 70 - 70 \cdot 0{,}4 = 42$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

• *Попробуйте посчитать, сколько ступенек уходит под землю. Сколько бы вы прошли ступенек, если бы эскалатор стоял?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору метрополитена за время $t_1 = 3$ минуты, а по движущемуся вверх за $t_2 = 2$ минуты. Сможет ли он подняться по эскалатору, движущемуся с той же скоростью вниз? Если да, то за какое время?

Ответ. 6 **минут.**

Решение. Собственная скорость пассажира равна $v_p = \frac{l}{t_1}$, где l - длина эскалатора. Когда эскалатор движется вверх, то скорости пассажира и эскалатора сложатся, и относительно земли пассажир будет двигаться со скоростью $v_p + v$, где v – скорость движения эскалатора. Тогда время подъема станет равным $t_2 = \frac{l}{v_p+v} = \frac{l}{\frac{l}{t_1}+v}$.

Отсюда можно определить скорость эскалатора:

$$l = \frac{lt_2}{t_1} + vt_2, v = \frac{l(1 - \frac{t_2}{t_1})}{t_2} = l(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}).$$

Если пассажиру вздумается идти вверх по эскалатору, то скорость эскалатора вычтется из его собственной скорости, и общая скорость подъема станет равной $v_p - v$, тогда время подъема:

$$v_3 = \frac{l}{v_p - v} = \frac{l}{\frac{l}{t_1} - (\frac{l}{t_2} - \frac{l}{t_1})} = \frac{1}{\frac{2}{t_1} - \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1} = 6.$$

□

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте посчитать собственную скорость пассажира из длины искалатора. А теперь посчитайте скорость при движении вверх и движении вниз.*

$\boxed{4}$ Эскалатор метро спускает идущего по нему человека за время $t_1 = 1$ минута. Если человек будет двигаться относительно эскалатора вдвое быстрее, то он спустится за $t_2 = 45$ секунд. Сколько времени будет спускаться человек, стоящий на эскалаторе?

Ответ. 90 **секунд.**

Решение. Пусть сначала скорость спуска человека относительно эскалатора равна u, тогда во второй раз она будет $2u$. Скорость эскалатора обозначим за v. Поскольку в обоих случаях и человек, и эскалатор движутся в одну сторону, то скорости будут складываться. Поэтому время первого спуска равно $t_1 = \frac{l}{u+v}$, а время второго спуска будет $t_2 = \frac{l}{2u+v}$. Если человек на эскалаторе просто стоит, то он и движется со скоростью эскалатора, ее нам и надо найти. Составим из этих двух уравнений систему и решим ее:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{l}{t_1} \\ 2u + v = \dfrac{l}{t_2} \end{cases} ; \Rightarrow \begin{cases} 2u + 2v = \dfrac{2l}{t_1} \\ 2u + v = \dfrac{l}{t_2} \end{cases},$$

вычитая из первого уравнения второе, получим: $v = \frac{2l}{t_1} - \frac{l}{t_2}$. Теперь можно определить и время спуска, если человек стоит на эскалаторе. Оно будет равно:

$$t_3 = \frac{l}{v} = \frac{1}{\frac{2}{t_1} - \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1} = \frac{90 \cdot 45}{2 \cdot 45 - 60} = 90.$$

□

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте обозначить скорость человека относительно эскалатора за неизвестное в обоих случаях. Заметили, что скорости складываются со скоростью эскалатора? Вычислите и напишите уравнения.*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Два человека одновременно вступают на эскалатор с противоположных сторон и движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями относительно эскалатора $v = 2$ м/с. На каком расстоянии от входа на эскалатор они встретятся? Длина эскалатора 100 метров, его скорость $u = 1{,}5$ м/с.

Ответ. 87,5 **метров.**

Решение. Если наши пассажиры встретились, то, следовательно, прошли весь эскалатор: часть — один, а часть — второй. Тот, что двигался в ту же сторону, что и эскалатор, относительно земли перемещался со скоростью $v + u$, а тот, что шел навстречу движению — со скоростью $v - u$. Таким образом, скорость сближения двух людей равна $v + u + v - u = 2v$. Таким образом, время их движения равно $t = \frac{l}{2v}$, где l — длина эскалатора. За это время тот, что шел в одну сторону с эскалатором, прошел:

$$l_1 = t \cdot (v + u) = \frac{l(v + u)}{2v} = \frac{100(2 + 1{,}5)}{4} = 87{,}5,$$

а тот, что шел навстречу движению эскалатора, прошел:

$$l_2 = t \cdot (v - u) = \frac{l(v - u)}{2v} = \frac{100(2 - 1{,}5)}{4} = 12{,}5.$$

Таким образом, если вход на эскалатор там, где ступил на него первый пассажир (что логично), то встретятся они в 87,5 метров от этого места. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте посчитать, сколько из них прошёл каждый.*

$\boxed{\mathbf{6}}$ Эскалатор метро движется со скоростью $v = 1$ м/с. Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступеням следующим образом: делает шаг на ступеньку вперед и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время $t = 70$ с. Через какое время пассажир добрался бы до конца эскалатора, если бы шел другим способом: делал два шага вперед и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперед и назад одинакова и равна $u = 0{,}5$ м/с. Считать размеры ступеней много меньше длины эскалатора.

Ответ. 50 **секунд.**

Решение. Пусть человек затрачивает время t для того, чтобы шагнуть на одну ступеньку. Тогда сначала он будет двигаться со скоростью $-\frac{1}{3t}$, поскольку в итоге шагает назад на одну ступеньку, и делает это за тройное время. Иначе говоря, скорость человека в первом случае равна $-\frac{u}{3}$. Движется он в сторону, противоположную движению эскалатора, поэтому его скорость относительно земли равна $v - \frac{u}{3}$. В конце концов он добирается до нижней точки, то есть совершает перемещение $l = (v - \frac{u}{3})t$. Если бы он шел вторым способом, то скорость относительно эскалатора была бы $\frac{u}{3}$, а относительно земли $v + \frac{u}{3}$. Время перемещения тогда составило бы:

$$t_1 = \frac{l}{v + \frac{u}{3}} = \frac{(v - \frac{u}{3})t}{v + \frac{u}{3}} = \frac{(3v - u)t}{3v + u} = \frac{2{,}5 \cdot 70}{3{,}5} = 50.$$

□

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте за неизвестное взять время, необходимое для шага на одну ступеньку. Посчитайте его скорости в обоих случаях. И перемещение.*

7 Моторная лодка прошла 4 километра против течения реки, а затем прошла еще 33 километра по течению реки, затратив на это один час. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 6,5 км/ч.

Ответ. 32,5 **км/ч.**

Решение. Обозначим через x км/ч скорость моторной лодки в стоячей воде. Тогда скорость моторной лодки по течению реки равна

$(x+6{,}5)$ км/ч, а против течения реки — $(x-6{,}5)$ км/ч. Время, затраченное моторной лодкой по течению реки — $\frac{33}{x+6{,}5}$ часов, а против течения реки — $\frac{4}{x-6{,}5}$ часов. Зная, что моторная лодка на весь путь затратит один час, составим уравнение: $\frac{33}{x+6{,}5}+\frac{4}{x-6{,}5}=1$. Решив это уравнение, получим два решения: $x_1=4{,}5$ и $x_2=32{,}5$. x_1 не удовлетворяет условиям задачи, так как при такой скорости моторная лодка не смогла бы преодолеть течения реки. Поэтому ответ x_2. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Обозначьте за неизвестную скорость лодки в стоячей воде и составьте уравнение.*

8 От пристани А к пристани В вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю 1/10 часть пути от А до В моторная лодка плыла с выключенным мотором, и ее скорость относительно берега была равна скорости течения. На той части пути, где моторная лодка плыла с работающим мотором, ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани В моторная лодка и байдарка прибыли одновременно. Найти собственную скорость (скорость в неподвижной воде) байдарки.

Ответ. 8 **км/ч.**

Решение. Пусть x км/ч собственная скорость байдарки. Моторная лодка проплыла $9/10S$ со скоростью $x+2{,}8$ за время $\frac{9/10\cdot S}{x+10}$ часов. Байдарка проплыла S со скоростью $x+2$ за время $\frac{S}{x+2}$. Моторная лодка проплыла $1/10S$ со скоростью 2 км/ч за время $\frac{1/10S}{2}$. Зная, что к пристани В моторная лодка и байдарка прибыли одновременно, составим уравнение: $\frac{9/10S}{x+10}+\frac{1/10S}{2}=\frac{S}{x+2}$. Решив это уравнение, получим два корня уравнения: $x_1=-18$ и $x_2=8$. Подходит только второй корень. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте расписать пути и скорости байдарки и лодки. Составьте уравнение.*

Листок 26. Где больше?

На этом занятии мы будем сравнивать разные множества, не производя при этом большого количества подсчетов. Для этого объекты из разных множеств мы будем разбивать на пары. То множество, в котором элементам не хватило пары, и будет больше. Стоит разобрать простые примеры.

1. Ребят в классе разбивают на пары, в каждой паре есть мальчик и девочка, но трём мальчикам пары не хватило. Кого в классе больше? *Ответ: мальчиков. Так как в парах мальчиков и девочек поровну, но остались «лишние» мальчики.*

2. Каких чисел от 1 до 100 больше: делящихся на 3 или на 5? *Ответ: Делящихся на три. Будем ставить в пару числа вида* $3n$ *и* $5n$*, где* n *— натуральное. Числа вида* $5n$ *закончатся на числе* 100*, а это* $5 \cdot 20$*, а числа вида* $3n$ *— на числе* 99*, это* $3 \cdot 33$*. Значит, останутся «непарные» числа, делящиеся на* 3*.*

$\boxed{1}$ **а)** Каких чисел от 1 до 1000 больше: чётных или нечётных? **б)** Каких чисел больше: четырёхзначных, или пятизначных, делящихся на 10?

Ответ. **а), б) одинаково.**

Решение. **а)** Будем нечетному числу $2n-1$ ставить в соответствие четное число $2n$, где n — натуральное (от 1 до 500). Получаем как раз 500 пар, значит, чётных и нечётных чисел поровну.

б) Четырёхзначному числу $\overline{abcd}$ ставим в соответствие пятизначное число $\overline{abcd0}$. Ясно, что так мы найдем пятизначную пару любому четырехзначному числу. Причем, число делится на ноль, если и только если оно оканчивается нулем. При этом, разделив такое число на 10 мы как раз получим четырехзначное число, поэтому и любому пятизначному числу мы тоже нашли пару. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай попробуем разбить все на пары. В пункте* ***б)*** *— вспомнить/придумать признак делимости на 10.*

$\boxed{2}$ Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр,

используемых для записи чисел, больше и на сколько?
Ответ. **Сумма цифр нечётных чисел больше на 499.**

Решение. Заметим, что суммы циифр соседних чисел $2n$(четного) и $2n+1$(нечетного) всегда отличаются ровно на единицу. Тогда именно на такие пары и разобьем все числа. Без пары у нас останутся только числа 1(нечетное) и 1000(четное), но их суммы цифр совпадают, поэтому мы можем их просто не учитывать. В каждой из оставщихся пар сумма цифр четного числа меньше ровно на единицу. Так как пар 499(два числа из 1000 мы исключили), сумма цифр всех четных чисел окажется меньше как раз на количество пар. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Смотри, а как отличается сумма цифр у соседних чисел?(Бывает соседнее слева и соседнее справа число! Для них суммы могут отличаться по-разному.) А давай, так на пары и разобьем? Сколько пар? А все числа разбились на пары?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Каких шестизначных билетиков больше: содержащих 2 или содержащих 5?(от 000000 до 999999) **б)** Каких шестизначных чисел больше: содержащих 7 или содержащих 0?

Ответ. **а) поровну; б) больше чисел, которые содержат чисо 7.**

Решение. **а)** Поменяем местами цифры 0 и 7. Очевидно, что набор билетиков останется таким же. То есть, числу, содержащему эти цифры, мы ставим в пару число, в котором вместо 7 стоят 0, и наоборот, а остальные цифры остаются неизменными. **б)** Как мы помним из предыдущего пункта, шестизначных билетиков(то есть, просто шестизначных наборов чисел) содержащих 0 столько же, сколько билетиков, содержащих 7. Но в отличие от билетиков, шестизначные числа не могут начинаться с нуля(например, бывает число 773210, но не бывает числа 003217). Так как эти билетики обязательно содержат ноль, но не всегда содержат 7, билетиков с 7 будет больше. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Важно ли на самом деле, про какую цифру мы говорим? А изменится ли набор билетиков, если поменять местами какие-то два символа местами? А чем отличается пункт **б)**? Чего тогда больше?*

$\boxed{4}$ Каких делителей больше у числа **а)** 1234567890; **б)** 9078563412: четных или нечетных?

Ответ. **а) поровну; б) четных делителей больше.**

Решение. **а)** Заметим, что число 1234567890 делится на 2, но не делится на 4. Теперь поставим в пару каждому делителю d нашего числа делитель $\frac{1234567890}{n}$. Так как наше число не делится на 4, ровно один из делителей будет четным. Значит, все делители разбились на пары из четного и нечетного(причем, один делитель входит ровно в одну пару), а значит, их поровну. **б)** Разобьем делители на пары также, как сделали это в предыдущем пункте. Но теперь наше число делится на 4, поэтому появятся пары, в которых будет по два чентых делителя(например, 2 и $\frac{9078563412}{2} = 4539281706$), но все еще не будет пар из двух нечетных. Поэтому четных делителей будет больше. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай выберем любой четный делитель. Теперь поделим на него. Получился четный или нечетный результат? А сам этот результат будет делителем? А чем отличается **б)**? А давай, посмотрим, какая "пара" будет у делителя* 2.

$\boxed{5}$ Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

Ответ. **Тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних.**

Решение. Заметим, что если у числа $\overline{abc}$ средняя цифра больше обеих крайних, то у числа $\overline{abc}$ средняя цифра меньше обеих крайних. Поэтому будем разбивать числа на пары $\overline{abc}$ — $(999 - \overline{abc})$. Как уже было сказано, если в паре есть число, у которого средняя цифра больше обеих крайних, то у второго средняя цирфа будет меньше обеих крайних. Но всегда ли найдется правильная пара числу, у которого средняя цифра больше обеих крайних? И вообще, всем ли трехзначным числам найдется трехзначная пара? Нет, не всем. У числе, которые больше 899, будет получаться двузначная пара. Так как среди них есть только такие, у которых средняя цифра меньше обеих крайних, их и будет больше. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай выберем какое-нибудь число, у которого средняя цифра больше крайних. Что можно поставить ему в пару?(А что к нему нужно прибавить, чтобы получилось 999?) А всем ли числам найдется пара? А из какой категории могут быть те числа, которым пара не найдется?*

6 Каких чисел больше от 1 до 1000000: тех, которые имеют ровно три натуральных делителя, или тех, которые имеют ровно два натуральных делителя?

Ответ. **Чисел с двумя делителями будет больше.**

Решение. Как мы помним, простое число — это число, которое делится только на себя и на единицу. То есть, как раз простые числа — это числа, имеющие ровно два делителя. Теперь посмотрим на произвольное составное число, если оно делится на простые p и q, то у него будет уже хотя бы 4 делителя: $1, p, q, pq$. Значит, число, имеющее ровно три делителя, является степенью простого. Оказывается, это будут квадраты простых чисел: p^2 делится на $1, p, p^2$. Теперь числу p с двумя делителями будем в пару ставить число p^2 с тремя делителями. Ясно, что $p^2 > p$ для любого простого p. Поэтому не для всех чисел с двумя делителями есть пара с тремя делителями в нашем промежутке(есть простые числа между 1000 и 1000000, а 1000^2 уже равно 1000000). ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай вспомним, какие числа имеют ровно два делителя? А какие три? Если у числа есть какой-то делитель, то на что еще оно точно делится?(Подразумевается, что если n делится на d,* *то оно делится и на* $\frac{n}{d}$*.) Отлично, мы нашли числа с тремя делителями. А как теперь сосавить пары из чисел с двумя и тремя делителями? Каким не зватит пары в нашем промежутке?*

$\boxed{\textbf{7}}$ На окружности отмечено 2000 синих и одна красная точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?

Ответ. **Больше тех многоугольников, у которых красная вершина есть.**

Решение. Заметим, что каждый выпуклый многоугольник с вершинами в заданных точках однозначно определяется набором своих вершин. Давайте теперь многоугольнику, содержащему только синие вершины, будем ставить в пару многоугольник, содержащий такой же набор синих вершин и красную. Так мы нашли пару всем «синим» многоугольникам. Но среди многоугольников, содержащих красную вершину, есть треугольники. И им «синей» пары не нашлось, потому что при выбрасывании красной вершины, мы получаем набор только из двух синих вершин, а он не дает нам никакого многоугольника. Значит, многоугольников, содержащих красную вершину, будет больше. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай посмотрим на произвольный синий треугольник. У нас есть «почти такой же»*

(подразумевается: с таким же набором синих вершин) с красной вершиной? Есть. Давай, составим из них пару. А всем ли многоугольникам с красной вершиной нашлась пара? Или есть такие, которые при выбрасывании красной вершины перестают быть многоугольникками?

$\boxed{\textbf{8}}$ Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2018, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2021. Каких треугольников больше?

Ответ. **треугольников с периметром** 2021 **больше.**

Решение. Пусть стороны треугольника равны целым числам a, b, c, и его периметр $a+b+c$ равен 2018. Поставим этому треугольнику в соответствие треугольник со сторонами $a+1, b+1, c+1$, периметр которого равен 2021 (этот треугольник существует; в самом деле, рассмотрим, например неравенство треугольника $(a+1)+(b+1) > (c+1)$; оно следует из неравенства треугольника $a+b > c$ для треугольника со сторонами a, b, c). Это соответствие однозначно сопоставляет треугольнику с целочисленными сторонами, имеющему периметр 2018, треугольник с целочисленными сторонами, имеющий периметр 2021. При этом соответствии различным треугольникам соответствуют различные. Однако, при установленном соответствии треугольник периметра 2021 со сторонами $1, 1010, 1010$ не соответствует никакому треугольнику периметра 2018. Следовательно, треугольников с периметром 2018 больше. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Насколько отличаются эти два периметра? А как из треугольника с меньшим периметром получить треугольник с большим? А наоборот? А всегда ли можео сделать обратную операцию?*

Листок 27. Измерение углов

Это занятие посвящено измерению углов. Здесь много задач о подсчёте углов между стрелками часов в разных ситуациях, а также задач на подсчёт углов с общей вершиной. Особо отметим, что во многих задачах условие допускает несколько случаев (и несколько ответов) — об этом следует предупредить школьников.

В начале занятия стоит напомнить основные соображения о движении стрелок часов. Часовая стрелка делает полный оборот (360°) за 12 часов, а минутная — за час. Поэтому угловая скорость часовой стрелки равна 30°/ч$=30^\circ$/60мин$=\frac{1}{2}^\circ$/мин, а угловая скорость минутной стрелки равна 360°/ч$=360^\circ$/60мин$=6^\circ$/мин. Поэтому за одну минуту угол между стрелками увеличивается (или уменьшается — в зависимости от их начального расположения) на $6^\circ-0{,}5^\circ = 5{,}5^\circ$. Если же за эту минуту стрелки в некоторый момент совпали, то сумма углов между стрелками в начале и в конце минуты также будет равна 5,5°. Важно отметить, что часовая стрелка, как и минутная, движется постоянно и равномерно (а не раз в час). Разберите задачу **-1.**

-1. Найдите первый момент времени после 9:00, когда стрелки часов образуют угол 156°.

Ответ. **9:12.**

Решение. В 9:00 угол между стрелками, очевидно, равен 90°. После этого он будет увеличиваться. Нас интересует, за какое время он увеличится на $156^\circ - 90^\circ = 66^\circ$. Как мы уже обсудили, угол между стрелками меняется со скоростью 5,5°/мин, поэтому чтобы увеличить его на 66°, нужно $66^\circ : 5{,}5^\circ$/мин$=12$ минут. ☐

Теперь напомните теорему о свойствах смежных и вертикальных углов (можно даже с доказательством, потому как оно совсем простое). Напомните также основное свойство измерения углов, если угол делится лучом на несколько частей, то его градусная мера равна сумме градусных мер этих частей. Для некоторых школьников может быть полезным напомнить и определение биссектрисы угла. Теперь разберите задачу **0.**

0. Два угла с величинами 20° и 100° имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать две другие их стороны?
Ответ. 80° **или** 120°**.**

Решение. Решение задачи очевидно, однако не всем школьникам будет очевидно, что возможны два случая: меньший угол может располагаться как во внешней, так и во внутренней области большего. Стоит дать школьникам некоторое время для размышления над задачей, прежде чем сообщать готовое решение. ☐

$\boxed{1}$ Найдите угол между стрелками часов: **а)** в 9:30; **б)** в 10:40.
Ответ. **а)** 105°; **б)** 80°.

Решение. **а)** Если бы часовая стрелка показывала точно на 9, а минутная — на 6, то угол между ними был бы прямым. Однако на самом деле за полчаса после 9:00 часовая стрелка сдвинулась на половину деления, то есть на 15°. Поэтому угол между стрелками в этот момент равен $90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$. **б)** Если бы часовая стрелка показывала точно на 10, а минутная — на 8, то угол между ними был бы равен 60°. Однако на самом деле за полчаса после 10:00 часовая стрелка за 40 минут, то есть за две трети часа, сдвинулась на две трети деления, то есть на 20°. Поэтому угол между стрелками в этот момент равен $60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$. ☐

○ `Школьник даёт ответы` 90° `и` 60°.

● *Надо учесть, что часовая стрелка двигается на раз в час, а непрерывно. На какой угол она повернётся за полчаса? А за 40 минут?*

$\boxed{2}$ После 9:00 часовая и минутная стрелки часов впервые оказались на одной прямой. Что в этот момент показывает секундная стрелка?
Ответ. ≈ 22 **секунды.**

Решение. В 9:00 угол между стрелками равен 90°, после чего он начинает увеличиваться со скоростью 5,5°/мин. Чтобы он увеличился на 90° и стал равным 180° (тогда стрелки окажутся на одной прямой), нужно 90° : 5,5°/мин = 180/11 мин = $16\frac{4}{11}$ мин. Осталось вычислить, что $\frac{4}{11}$ мин = $\frac{4}{11} \cdot 60$ сек ≈ 22 сек. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Какой угол образуют стрелки часов в 9:00? На сколько он должен увеличиться, чтобы они оказались на одной прямой? С какой скоростью увеличивается этот угол? Сколько времени займёт его увеличение до нужной величины с такой скоростью? Сколько это целых минут и сколько примерно целых секунд?*

$\boxed{\textbf{3}}$ В полдень минутная и часовая стрелки часов совпали. Когда они совпадут в следующий раз? Когда они совпали в предыдущий раз?

Ответ. **13 часов $5\frac{5}{11}$ минуты; 10 часов $54\frac{6}{11}$ минуты**

Решение. Чтобы стрелки часов вновь совпали, минутная стрелка должна «обогнать» часовую на 360°. Поскольку минутная стрелка обгоняет часовую со скоростью 5,5°/мин, на это потребуется 360° : 5,5°/мин = 720/11 мин = $65\frac{5}{11}$ мин. Таким образом, в следующий раз после полудня это произойдёт в 13 часов $5\frac{5}{11}$ минуты, а в предыдущий — в 10 часов $54\frac{6}{11}$ минуты. ☐

○ `Школьник даёт приближённые ответы:`
`«примерно в 13:05», «примерно в 10:55».`

● *Нужно вычислить точные значения (не «на глаз»). Не страшно, если в ответе будут дроби (даже обыкновенные, а не десятичные).*

$\boxed{\textbf{4}}$ Сейчас стрелочные часы показывают полдень. Когда угол между ними впервые станет равен 90°? Когда это произойдёт во второй раз?

Ответ. **В 12 часов $16\frac{4}{11}$ минуты; в 12 часов $49\frac{1}{11}$ минуты.**

Решение. Угол между стрелками часов должен увеличиться с 0° до 90°. На это нужно 90° : 5,5°/мин = $16\frac{4}{11}$ мин. То есть первый раз после полудня прямой угол между стрелками будет в 12 часов $16\frac{4}{11}$ минуты. Во второй раз угол между стрелками станет прямым, когда минутная стрелка уже будет «догонять» часовую, и для этого минутная стрелка должна «обогнать» часовую на 270° по сравнению с полуднем. На это нужно втрое больше времени, чем на первый прямой угол, то есть $49\frac{1}{11}$ минуты. Значит, во второй раз прямой угол между стрелками будет в 12 часов $49\frac{1}{11}$ минуты. ☐

$\boxed{5}$ Света измерила угол между часовой и минутной стрелками часов. Через полчаса она снова его измерила, и оказалось, что угол не изменился! Чему мог быть равен этот угол, если часы исправны?
Ответ. 82,5° **или** 97,5°.

Решение. За полчаса минутная стрелка поворачивается на 180°, а часовая — на 15°. Значит, угол между стрелками (если мерить его «по часовой стрелке» от часовой стрелки к минутной и разрешать ему быть больше 180°) должен был увеличиться на 165°. Если первоначально этот угол был равен $\alpha < 180^\circ$, то через полчаса он станет равен $360^\circ - \alpha$. Значит, $\alpha + 165^\circ = 360^\circ - \alpha$, откуда $\alpha = (360^\circ - 165^\circ)/2 = 97{,}5^\circ$. Если же первоначально этот угол был равен $360^\circ - \alpha > 180^\circ$, то через полчаса он станет равен α. Значит, $360^\circ - \alpha + 165^\circ = \alpha + 360^\circ$, откуда $\alpha = 165^\circ/2 = 82{,}5^\circ$. ☐

○ `Школьник нашёл только один из ответов (скорее всего, меньший).`

● *Обязательно ли угол между стрелками всё время возрастал в течение получаса? Могло ли быть, что он сначала уменьшался, а потом возрастал?*

$\boxed{6}$ **а)** Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов. **б)** Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
Ответ. **а)** 90°.

Решение. **а)** Обозначим смежные углы $\angle AOB$ и $\angle BOC$, а их биссектрисы, соответственно, OK и OL. Тогда угол между биссектрисами — это угол $\angle KOL = \angle KOB + \angle BOL = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ (второе равенство в цепочке следует из определения биссектрисы угла, а предпоследнее — из свойства смежных углов). **б)** Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O, образуя две пары вертикальных углов — $\angle AOB = \angle COD$

и $\angle BOC = \angle AOD$. Пусть OK — биссектриса угла AOB, OL — биссектриса угла BOC, OM — биссектриса угла COD. Тогда по пункту а) $OK \perp OL \perp OM$ (так как $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные, и $\angle COD$ и $\angle BOC$ — смежные. Отсюда следует, что OK и OM лежат на одной прямой. □

7 Три луча выходят из одной точки и образуют три угла, каждый из которых меньше развёрнутого. Величина одного из них равна 100°. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.
Ответ. 50° **или** 130°.

Решение. Если все три угла в сумме дают 360°, то два других угла в сумме дают $360° - 100° = 260°$. Угол между биссектрисами этих углов образован половинами этих углов, а потому равен $260° : 2 = 130°$. Если же два других угла в сумме образуют угол 100°, то угол между их биссектрисами равен половине этого угла, то есть 50°. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Из каких частей состоит угол между биссектрисами? Как он связан с суммой двух оставшихся углов? Чему равна эта сумма?*

○ `Школьник даёт только ответ` 130°.

● *Где может быть расположен третий луч по отношению к сторонам угла в* 100°?

8 Из точки O в указанном порядке выходят лучи OA, OB, OC, OD. Известно, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

Решение. Пусть OK — биссектриса угла AOC, OL — биссектриса угла BOD. Требуется доказать, что $\angle KOL = 90°$. Заметим, что $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \angle AOK + \angle KOL + \angle LOD = \frac{1}{2}\angle AOC + \angle KOL + \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD) + \angle KOL$. В то же время из условия следует, что $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180° + \angle BOC$. Кроме того, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \angle AOC + \angle BOD - \angle BOC$. Поэтому $\angle AOC + \angle BOD = 180° + 2\angle BOC$. Значит, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \frac{1}{2}(180° + 2\angle BOC) + \angle KOL = 90° + \angle BOC + \angle KOL = 180° + \angle BOC$. Отсюда следует, что $\angle KOL = 90°$. □

$\boxed{\mathbf{9}}$ Из точки O проведены четыре различных луча OA, OB, OC, OD. Известно, что $\angle AOB = 30°$, $\angle COD = 60°$, $\angle BOC = 90°$. Найдите $\angle AOD$.

Ответ. $60°, 120°, 180°$.

Решение. Будем считать, что кратчайший поворот вокруг точки O от луча OA до луча OB направлен по часовой стрелке (другой случай рассматривается аналогично этому). Далее, кратчайший поворот вокруг точки O от луча OB до луча OC может быть направлен по часовой стрелке или против часовой стрелки, а также кратчайший поворот вокруг точки O от луча OC до луча OD может быть направлен по часовой стрелке или против часовой стрелки. Получаем, что $\angle AOD = \angle AOB \pm \angle BOC \pm \angle COD$ (плюсы ставятся в тех случаях, когда кратчайший поворот осуществляется по часовой стрелке, а минусы — в противоположном случае). Получаем, что $\angle AOD = 30° \pm 60° \pm 90°$, откуда возможные значения этого выражения равны $180°$, $0°$,$60°$, $-120°$. Случай $0°$ противоречит условию (он означает, что лучи OA и OD совпадают, а по условию они различны), а знак минус в последнем случае означает, что кратчайший поворот вокруг точки O от луча OA до луча OD осуществляется против часовой стрелки. □

○ `Школьник рассматривает не все случаи.`

● *Как ещё могут быть расположены лучи? Вспомни задачу 0: однозначно ли углы между лучами задают их взаимное расположение?*

Листок 28. Подсчёт двумя способами

Основная идея задач данного занятия — посчитать количество каких-либо объектов двумя способами из разных соображений и на основании этого сделать выводы — составить уравнение, получить противоречие и пр. В начале занятия разберите вводные задачи **–1** и **0**.

–1. Можно ли расставить числа в таблице 5×5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

Ответ. **Нет.**

Решение. Допустим, что можно. Найдем сумму всех чисел. Если считать её по строкам, то сумма будет положительной, а если по столбцам — то отрицательной. Противоречие. Значит, так расставить числа нельзя. ☐

0. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Ответ. 15 **мальчиков,** 12 **девочек.**

Решение. Пусть мальчиков и девочек m и n соответственно. Найдем общее количество «дружб» двумя способами. Поскольку каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, это число равно $4m$. С другой стороны, каждая девочка дружит с пятью мальчиками, значит это число равно $5n$. Получаем уравнение $4m = 5n$. Поскольку $m + n = 27$, то $m = 15$, $n = 12$. ☐

$\boxed{\mathbf{1}}$ Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 (5 строк, 10 столбцов) так расставить числа, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась 30, а сумма чисел в каждом столбце равнялась 10?

Ответ. **Нет.**

Решение. Предположим, что такая таблица существует, и подсчитаем, чему равняется сумма всех её чисел. С одной стороны, таблица содержит 5 строк, сумма чисел в каждой из которых — 30, значит, искомая сумма равна 150. С другой стороны, в таблице 10 столбцов, сумма чисел в каждом из которых — 10. Отсюда общая сумма равна 100. Противоречие. ☐

○ `Школьник не знает, что делать, или пытается придумать пример такой таблицы.`

● *Вспомни задачу –1, которую мы разбирали в начале, и попробуй решить эту задачу аналогичным образом.*

2 Взяли несколько одинаковых квадратов. Вершины каждого из них пометили цифрами 1, 2, 3 и 4 в произвольном порядке. Затем их сложили в стопку. Могла ли сумма чисел в каждом углу оказаться равной 12?

Ответ. **Нет.**

Решение. Сумма чисел в вершинах каждого отдельного квадрата равна $1+2+3+4 = 10$. То есть, сколько бы мы ни взяли квадратов, общая сумма всех чисел в стопке кратна 10. Если бы в каждом углу сумма была равна 12, то общая сумма была бы $12 \cdot 4 = 48$. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Пусть будет n квадратов. Попробуй посчитать сумму всех написанных на них чисел двумя способами.*

3 Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

Ответ. **Неверно.**

Решение. Пример: 24 числа равны -1, а одно число равно 5. Тогда условие выполняется, а общая сумма равна -19. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Что будет, если среди чисел много равных? Могут ли они все быть равными? А все, кроме одного?*

4 В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

Ответ. **Не могло.**

Решение. Пусть за ничью каждый получает по очку. Суммируя эти очки по играм, получим чётное число, а по игрокам — нечётное. Противоречие. ☐

• *Можно решить задачу и иначе: если бы каждый из 15 шахматистов сыграл по 5 ничьих, то всего вничью было бы сыграно* $15 \cdot 5 : 2$ *партий (делим на 2, потому что иначе каждая партия будет посчитана два раза — для каждого из участников), а это нецелое число.*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка? (В каждой клетке может стоять не более одной звёздочки.)
Ответ. **Нет.**

Решение. Пусть так расставить звёздочки удалось. Квадрат 10×10 можно разбить на 25 непересекающихся квадратов 2×2. Так как в каждом из них — по две звёздочки, то всего звёздочек 50. С другой стороны, 99 клеток исходного квадрата можно разбить на 33 непересекающихся прямоугольника 3×1. В каждом из них — по одной звёздочке, поэтому всего в квадрате — не больше 34 звёздочек. Противоречие. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

• *Можно ли квадрат разбить на квадраты* 2×2*? А на прямоугольники* 1×3 *(хотя бы не весь квадрат, а почти весь)? Как теперь можно посчитать общее число звездочек в квадрате?*

$\boxed{\mathbf{6}}$ 2017 шаров раскрасили в 7 цветов радуги (каждый шар — в один цвет). На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?
Ответ. **7.**

Решение. На каждом шарике написано число шариков данного цвета n. Число, обратное к нему, равно $\frac{1}{n}$. Всего слагаемых вида $\frac{1}{n}$ ровно n штук. Сложив эти слагаемые, получим $\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$, и так для каждого цвета. А всего цветов 7. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Пусть сначала шаров не 2017, а 10. Раскрасим их в цвета радуги и проделаем вычисления, как в условии. Что получится? А если изменить количество шаров? А если изменить количество цветов?*

$\boxed{7}$ У Маши есть двухрублёвые и пятирублёвые монеты. Если она возьмёт все свои двухрублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить четыре пирожка. Если возьмёт все пятирублёвые — не хватит 60 рублей на пять пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки шести пирожков. Сколько стоит пирожок?

Ответ. **20 рублей.**

Решение. Если Маша возьмет все свои монеты (и двухрублёвые, и пятирублёвые), то всего ей не хватит $60+60=120$ рублей на $4+5=9$ пирожков. С другой стороны, ей будет не хватать 60 рублей на 6 пирожков. То есть три пирожка стоят $120-60=60$ рублей. □

$\boxed{8}$ Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

Ответ. **20.**

Решение. Посчитаем двумя способами количество границ белых лоскутков с чёрными. Пусть x — число лоскутков белого цвета. Тогда лоскутков чёрного цвета будет $32-x$. Каждый белый лоскуток граничит с тремя чёрными, т.е. число границ равно $3x$. С другой стороны, каждый чёрный лоскуток граничит с пятью белыми, т.е. число границ равно $5(32-x)$. Получаем уравнение $3x=5(32-x)$. Отсюда $x=20$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Пусть x — число лоскутков белого цвета. Сколько тогда лоскутков чёрного цвета? А как можно посчитать количество границ белых лоскутков с чёрными?*

9 Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

Ответ. **Нет.**

Решение. Рассмотрим количество фигур, стоящих на чёрных клетках. С одной стороны, это число равно сумме количеств фигур на диагоналях, параллельных диагонали $a1-h8$, т.е. нечётному числу. С другой стороны, оно равно сумме количеств фигур в диагоналях, параллельных диагонали $a8-h1$, т.е. чётному числу. Следовательно, описанная ситуация невозможна. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Подсказка: диагонали бывают «чёрные» и «белые». А ещё они бывают двух «направлений»: параллельные диагонали $a1-h8$ и параллельные диагонали $a8-h1$.*

10 Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

Ответ. **29 туристов.**

Решение. Каждый из x «счастливчиков» привел по 4 друга. Тогда «приведённых» клиентов $4x$, еще 13 пришли сами, значит, всего туристов было $13+4x$. С другой стороны, x человек привели новых клиентов, а 100 — не привели, т.е. всего туристов было $x+100$. Итак, $13+4x = x+100$, откуда $x = 29$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

- *Откуда берутся туристы? Некоторые приходят сами, а некоторых приводят друзья. А что делают туристы? Некоторые приводят друзей, а некоторые нет. А теперь обозначим число «счастливчиков» за* x. *Сколько тогда будет всего туристов? Посчитай двумя способами исходя из того, что мы только что обсудили.*

Листок 29. Турниры

В начале занятия нужно напомнить основные понятия, связанные с турнирами (системы организации турниров и начисления очков.)

Однокруговой турнир: когда каждый участник встречается с каждым один раз — играет с ним один матч (партию). Чаще всего за выигранную партию начисляется 1 очко, за ничью пол-очка, за проигрыш 0 (*шахматная система подсчёта очков*). Эта система примечательна тем, что независимо от исхода партии два игрока в сумме получают за неё одно очко.

При *олимпийской системе* турнир состоит из нескольких туров, в каждом из которых участники проводят по одной встрече и проигравший выбывает из турнира.

Стоит также сообщить, что в футбольных турнирах принята *футбольная система подсчёта очков*: за победу команда получает 3 очка, за ничью — одно очко, за поражение — 0 очков. Во всех задачах сегодняшнего листочка, где речь идёт о футбольных соревнованиях, используется именно эта система подсчёта очков. В такой системе, в отличие от шахматной, суммарное число двух очков команды за матч зависит от исхода матча: оно равно 2 в случае ничьи и 3 в остальных случаях.

Далее разберите вводную задачу **0**:

0. а) В однокруговом шахматном турнире с восемью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?

б) В незаконченном шахматном турнире сыграно пока только 15 партий. Сколько всего очков успели набрать участники?

в) Закончился однокруговой шахматный турнир с 16 участниками. Чему равна сумма набранных очков?

Ответ. **а)** 28 **очков и** 28 **партий. б) 15. в) 120.**

Решение. **а)** Каждый участник набрал семь раз по $\frac{1}{2}$, то есть всего по 3,5 очка. Соответственно, 8 участников набрали $8 \cdot 3{,}5 = 28$ очков. Число партий: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. Совпадение с числом очков не случайно: действительно, ведь в каждой партии, при любом исходе, соперники (в сумме) получили 1 очко. **б)** Ещё раз таже идея. При ничьей игроки в сумме получают одно очко. Но ведь и при выигрыше тоже. Раз так, общее число очков равно числу сыгранных партий, то есть 15. **в)** Мы уже заметили, что сумма очков не зависит от результатов партий. Поэтому можно считать сумму очков для случая, когда все ничьи $16 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 120$. ☐

$\boxed{\mathbf{1}}$ Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

Ответ. **Не мог.**

Решение. В первых двух матчах «Вымпел» забросил не больше шести шайб. Но и не меньше шести, так как в третьем матче «Вымпел» забросил на 6 шайб меньше. Значит, это число равно 6, и в третьем матче «Вымпел» забросил 0 шайб. Поэтому третий матч «Вымпел» не выиграл. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Как можно оценить количество шайб, заброшенных командой в первых двух матчах вместе?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе $2 - 1 - 0$ команда A набрала 5 очков, B — 2 очка, C — 1 очко. Какое место заняла команда D?

Ответ. **Второе место.**

Решение. В таком однокруговом турнире будет сыграно $4 \cdot 3 : 2 = 6$ матчей. Сумма очков двух команд за каждый сырганный матч равна 2. Поэтому всего команды набрали $6 \cdot 2 = 12$ очков, а команда D набрала $12 - 5 - 2 - 1 = 4$ очка и заняла второе место. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько было сыграно матчей? А сколько всего очков было набрано командами в этих матчах?*

3 В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

Ответ.

	А	Б	В	Г	Очки	Места
А	▨	1	3	3	7	I
Б	1	▨	1	1	3	II
В	0	1	▨	1	2	III–IV
Г	0	1	1	▨	2	III–IV

Решение. У команд В и Г не более чем по 2 очка, поэтому нет побед и между собой они сыграли вничью. Команда Б в обоих матчах против В и Г получала очки, значит, в каждом — меньше трёх очков, то есть оба матча сыграла вничью, заработав 2 очка. Тогда третье очко команда Б заработала ничьей с А. Команда В заработала 2 очка в матчах против Б и Г, значит, В проиграла А. Аналогично, команда Г проиграла А. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько очков могли набрать команды В и Г? Как им для этого надо было играть?*

4 Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов команда получала четыре очка, за ничью — два очка и за поражение — одно. Сумма очков, набранных обеими командами, оказалась равна 46. Сколько было ничьих?

Ответ. **4.**

Решение. Пусть ничьих было n, тогда результативных встреч было $(10 - n)$. Из условия следует, что $4 \cdot n + 5 \cdot (10 - n) = 46$ и $n = 4$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Обозначим количество ничьих за n. Сколько было результативных встреч? Как выразить через n сумму очков, набранных двумя командами вместе?*

$\boxed{5}$ Вилли, Билли, Бим и Бом провели круговой турнир по шахматам. Известно, что четыре партии было сыграно вничью, а Вилли набрал 0,5 очка. Бим сказал, что он за турнир набрал 2,5 очка. Могло ли такое быть?

Ответ. **Нет, не могло.**

Решение. В турнире было сыграно шесть партий, из которых четыре закончились вничью, значит, результативных партий было всего две. Каждый участник провёл три партии, поэтому Вилли, набравший пол-очка, двум различным соперникам проиграл. Таким образом, эти соперники взяли по одному очку в партиях с Вилли и еще по две партии сыграли вничью, то есть набрали по два очка. Это и есть лучший результат, так как оставшийся игрок все три партии свел вничью, то есть набрал 1,5 очка. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько было сыграно партий? А сколько партий сыграл каждый игрок? Как свои партии сыграл Вилли?*

$\boxed{6}$ Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько партий больше он выиграл, чем проиграл?

Ответ. **На 5 партий больше.**

Решение. Если бы шахматист свёл все партии вничью, он бы набрал 10 очков. Если какая-то партия в действительности выиграна, то сумма очков увеличивается на пол-очка, а если проиграна — уменьшается на пол-очка. По условию сумма равна 12,5 т.е. на 2,5 очка больше, пять ничьих надо заменить пятью победами. Соответственно любая другая возможная «вариация» сводится к замене одной ничьей на победу и ещё одной на поражние, разница количества побед и количества поражений от этого не меняется. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Что было бы, если бы все партии были сыграны вничью? Что происходит с количеством очков, если одна ничья заменяется на победу? А если на поражение? А как при этом меняется разница количества побед и количества поражений?*

● *Можно также решить задачу с помощью уравнения, например, приняв за неизвестное число ничьих.*

$\boxed{\mathbf{7}}$ В однокруговом чемпионате по математическим боям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. В газете написали, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей. Докажите, что журналисты ошиблись.

Решение. Каждая команда сыграла 15 боёв. Чтобы поиграть во всех школах, она должна была сыграть в каждой по одному разу. Значит, в каждой школе появилось 15 команд. Но 15 нечётно, а в бое участвуют две команды. Противоречие. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Сколько боёв сыграла каждая команда? Сколько команд побывало в каждой школе?*

$\boxed{\mathbf{8}}$ Турнир по боксу проходил по «олимпийской системе» (в каждом круге проигравшие выбывают). Сколько боксёров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграло боёв больше, чем проиграло?

Ответ. **128.**

Решение. Участники, выбывшие после первого круга, проиграли по одному бою и не выиграли ни одного. Участники, выбывшие после второго круга, по одному бою выиграли и по одному бою проиграли. Поэтому боксёры, которые выиграли больше боёв, чем проиграли — это те, которые выиграли хотя бы по два боя, то есть прошли в третий круг. Во второй круг прошла половина участников, а в третий — четверть. Следовательно, 32 человека составляют четверть от всех участников турнира, а общее количество боксеров равно 128. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Давай посмотрим, кто из боксёров мог выиграть больше боёв, чем проиграть. Могли ли это сделать те, кто выбыл после первого круга, после второго, после третьего?*

$\boxed{\textbf{9}}$ В турнире участвуют 64 боксёра разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Можно ли не более чем за 70 боёв выявить двух сильнейших?

Ответ. **Можно.**

Решение. Устроим сначала турнир по олимпийской системе. Чтобы выбыли 63 человека, понадобится 63 боя. При этом победитель проведёт 6 боёв и победит 6 боксёров. Второй по силе боксёр — среди них, так как никому другому он проиграть не мог. Для выявления второго достаточно организовать турнир по олимпийской системе среди этой шестерки. Чтобы выбыли 5 боксёров, потребуются 5 боёв. Итого $63 + 5 = 68$ боёв, то есть даже меньше 70. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуем выявить сильнейшего по олимпийской системе. Сколько боёв для этого понадобится? Среди кого искать второго по силе игрока?*

$\boxed{\textbf{10}}$ Пять футбольных команд сыграли турнир в один круг. После окончания турнира одну из команд дисквалифицировали, а все очки, набранные в матчах с ней, аннулировали. Могла ли команда, сначала занимавшая чистое первое место, стать абсолютно последней?

Ответ. **Могла.**

Решение. Пусть, например, команда A победила E, команды B, C, D выиграли друг у друга по кругу, а все остальные матчи закончились вничью. Тогда у A 6 очков, у B, C, D — по 5, у E — 3 очка. Дисквалифицируем команду E. Тогда у A останется 3 очка, у B, C, D — по 4. Как видим, A переместилась с первого места на последнее. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Чтобы первая команда стала последней, нужно, чтобы она значительную часть своих очков заработала в игре с дисквалифицированной командой. Как такое могло быть?*

Листок 30. Эйлеровы графы

В начале занятия следует сообщить основные понятия, связанные с графами (см. ниже) и проиллюстрировать на примерах графов: граф знакомств, схема линий метрополитена и др. Если школьники слабые, то задачи 6 и 8 можно сформулировать в виде теорем без доказательства.

Определение. *Граф* — это множество вершин и рёбер (отрезков, соединяющих две вершины.

Определение. *Путём* в графе называется последовательность вершин (необязательно всех различных), в которой каждые соседние вершины соединены ребром.

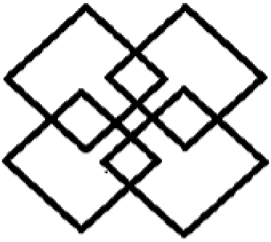
Определение. *Степенью вершины* графа называется число рёбер, выходящих из неё. Если это количество нечётно, то вершина называется нечётной, иначе — чётной.

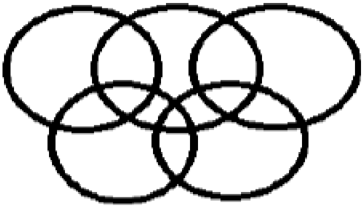
Определение. *Циклом* в графе называется последовательность вершин, последовательно соединённых рёбрами и начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине.

Определение. Путь, содержащий все рёбра графа, причём проходящий по каждому из них ровно один раз, называется *эйлеровым путём.*

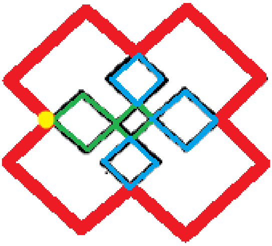
Определение. *Эйлеров цикл* — это эйлеров путь, являющийся циклом, то есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу. **Определение.** Граф называется связным, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий.

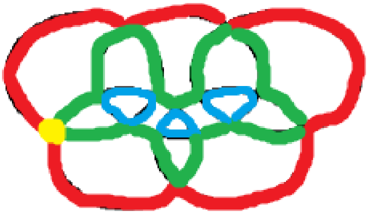
$\boxed{\textbf{1}}$ Нарисуйте фигуры, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.





Ответ.





Решение. Начинаем с жёлтой точки. В любую сторону рисуем красный цикл, закончив опять в жёлтой точке. Начинаем рисовать зелёный цикл в любом направлении, делая синие петли в любом направлении, как только до них доходим (по одному разу). ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте порисовать.*

2 В стране имеется несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из города Шарамбарам выходит ровно n дорог. Известный путешественник выехал из одного из городов и объехал всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Закончился ли его путь в Шарамбараме, если

а) он начал путь в городе Шарамбарам и n чётно;

б) он начал путь в городе Шарамбарам и n нечётно;

в) он начал путь в другом городе и n чётно;

г) он начал путь в другом городе и n нечётно?

Ответ.

а) Да.

б) Нет.

в) Нет.

г) Неизвестно.

Решение. а) Выехав из города, он оставил без посещения нечётное число дорог, а въехав - чётное. И так далее. В итоге, так как в конце он объехал все дороги, то количество непосещённых дорог стало 0, то есть чётное число, то есть она закончио путь в Шармбараме.

б) Аналогично рассуждением из предыдущего пункта, при нечётном количестве посещённых дорог он находится вне города, поэтому он закончил путь не в Шарамбараме.

в) Если из города выходит чётное число дорог, а путешествие начинается из него же, то он заканчивает путь в этом же самом городе, поэтому он не мог закончить свой путь в Шарамбараме.

г) В данном пункте он точно закончил путь не в стартовом городе, а в каком-то другому (рассуждения аналогичны), но неизвестно, в Шарамбараме или нет.

□

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте посмотреть, как меняется чётность количества непосещённых дорог, выходящих из города, когд путешественник находится во время путешествия в городе или вне него.*

$\boxed{3}$ **Задача Эйлера о Кенигсбергских мостах.** Через город Кёнигсберг протекает река, в русле которой расположены два острова. С большего острова ведет по два моста на каждый из берегов и один мост на меньший остров. Кроме этого моста с меньшего острова ведет по одному мосту на каждый из берегов. Некто хочет совершить прогулку по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Удастся ли ему это?

Ответ. **Не удастся.**

Решение. Если нарисовать картинку, то мы получим граф, у которого все вешины нечётные и их больше двух. Так как чётность (если не считать посещённые мосты) сохраняется при проходе через вершину графа, то отсюда следует, что начать и закончить надо в вершине с нечётной степенью. Так как их больше двух, то сделать этого не получится. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Посмотрите на предыдущую задачу и на то, как меняется чётность. Что следует из рисунка? Сколько здесь нечётных вершин?*

4 Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

Решение. Предположим, что такой путь есть. Пройдя по ребру, будем его вычёркивать из графа. Если через вершину пройти (войти и выйти), то чётность её не меняется. Чтобы поменять чётность, мы должны либо начать в вершине, либо закончить в ней. У всех нечётных вершин мы должны поменять чётность, так как 0 число чётное. Если нечётных вершин больше двух, то мы этого сделать не сможем, так как начать и закончить можем максимум в двух вершинах. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Посмотрите на две предыдущие задачи. Как меняется чётность вершин? Как можем её поменять?*

5 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть цикл.

Решение. Выберем любую вершину и начнём строить из неё цикл. Пройдя по ребру в следующую вершину, мы из неё сможем выйти дальше, так как степени всех вершин чётны. Продолжим этот процесс, пока (из-за того, что граф конечен) не попадём в вершину, использованную ранее. Цикл построен. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте строить цикл последовательно.*

6 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

Решение. Будем рассуждать по индукции по числу вершин. База $n = 0$ выполнется. Пусть для любого графа с менее, чем n вершинами существует разбиение на циклы. По предыдущей задаче в этом графе существует цикл. Удалим его. Так как этот цикл не является самопересекающимся, то в нём все степени вершин чётны (а, точнее, равны 2), то есть в полученном графе степени каких-то вершин уменьшились на 2, то есть мы получили опять граф, в котором n вершин, а степени каждой вершины чётны. Если в графе появились вершины степени 0, то удалим их и, по предположению индукции, оставшийся граф разбивается по условию задачи, если же таких вершин нет, то продолжим наш процесс выделения цикла и удаления всех рёбер, ему принадлежавших. Так как степени вершин графа конечны, то в конце концов какая-то вершина станет степени ноль, мы её удаляем и получаем, что всё доказано по предположению индукции. Также задачу можно решить без прямого применения индукции, просто последовательно применяя предыдущую задачу и удаляя рёбра полученного цикла. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте применить предыдущую задачу и предположение индукции.*

$\boxed{7}$ Докажите, что если два цикла имеют общую вершину, то их можно объединить в один самопересекающийся цикл.

Решение. Возьмём общую вершину и пройдём сначала по одному циклу, а потом по другому. Это и будет самопересекающийся цикл. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте построить цикл последовательно.*

$\boxed{8}$ Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

Решение. Докажем это, используя индукцию по числу вершин n. База индукции: $n = 0$, цикл существует. Предположим что граф имеющий менее n вершин содержит эйлеров цикл. Рассмотрим связный граф G с $n > 0$ вершинами, степени которых четны. Пусть v_1 и v_2 — вершины графа. Поскольку граф связный, то существует путь из v_1 в v_2. Степень v_2 — чётная, значит существует неиспользованное ребро, по которому можно продолжить путь из v_2. Так как граф конечный, то путь, в конце концов, должен вернуться в v_1, следовательно мы получим замкнутый путь (цикл). Назовем этот цикл C_1. Будем продолжать строить C_1 через v_1 таким же образом, до тех пор, пока мы в очередной раз не сможем выйти из вершины v_1, то есть C_1 будет покрывать все ребра, инцидентные (то есть содержащие) v_1. Если C_1 является эйлеровым циклом для G, тогда доказательство закончено. Если нет, то пусть G' — подграф графа G, полученный удалением всех рёбер, принадлежащих C_1. Поскольку C_1 содержит чётное число рёбер, инцидентных каждой вершине, то каждая вершина подграфа G' имеет чётную степень. А так как C_1 покрывает все ребра, инцидентные v_1, то граф G' будет состоять из нескольких компонент связности. Рассмотрим какую-либо компоненту связности G'. Поскольку рассматриваемая компонента связности G' имеет менее, чем n вершин, а у каждой вершины графа G' чётная степень, то у каждой компоненты связности G' существует эйлеров цикл. Пусть для рассматриваемой компоненты связности это цикл C_2. У C_1 и C_2 имеется общая вершина a, так как G связен. Теперь можно обойти эйлеров цикл, начиная его в вершине a, обойти C_1 , вернуться в a, затем пройти C_2 и вернуться в a. Если новый эйлеров цикл не является эйлеровым циклом для G, продолжаем использовать этот процесс, расширяя наш эйлеров цикл, пока, в конце концов, не получим эйлеров цикл для G. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте рассуждать по индукции по числу вершин в графе.*

$\boxed{9}$ Докажите, что если в связном графе ровно две вершины с нечетными степенями, то в этом графе есть эйлеров путь.

Решение. Добавим ребро, соединяющее вершины с нечетной степенью. Теперь можно найти эйлеров цикл, после чего удалить добавленное ребро. Очевидно найденный цикл станет путем. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте свести задачу к предыдущей.*

$\boxed{\mathbf{10}}$ При каких n правильный n-угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги и не проводя повторно по нарисованным отрезкам?

Ответ. **Для всех чётных n.**

Решение. Из каждой вершины правильно n-угольника выходит рёбер $2+(n-3)$ (две стороны и $n-3$ диагонали), то есть $n-1$ рёбер. Из задач выше у нас должно быть не более 2-х вершин с нечётной степенью, но, так как они все имеют одинаковую чётность, то они должны быть все чётными. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте найти связь с предыдущими задачами.*

$\boxed{\mathbf{11}}$ Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение. У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трёх знакомых, либо не менее трёх незнакомых ему. Разберём, например, первый случай. Среди этих трёх людей есть либо двое знакомых — тогда они вместе с выбранным нами исходно человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы. ☐

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте выбрать случайного человека среди всех и посмотреть на его количество знакомых. Рассмотрите разные случаи.*

Диагностическая работа

Эту работу предлагается давать школьникам после прохождения 15 предыдущих занятий для оценки текущих навыков участников кружка.

Форма проведения работы может быть разной — как тестовая (участники должны записать только ответы), либо письменная или устная олимпиада, где от участников требуется дать не только ответы, но и доказательства того, что ответы именно такие. Мы считаем допустимой любую из этих форм — выбор за руководителем кружка, в зависимости от уровня школьников и времени, имеющегося для проведения диагностики.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Таня ехала в пятом вагоне с конца поезда, а Маша — в шестом с начала. Сколько вагонов было в поезде, если Таня и Маша ехали в соседних вагонах?

Ответ. **9 или 11.**

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ. **16.**

$\boxed{\mathbf{3}}$ В выборах участвуют 10 разных кандидатов. Сколькими способами можно заполнить избирательный бюллетень, отметив в нём ни одного, одного или нескольких (можно даже всех) кандидатов?

Ответ. **1024.**

$\boxed{\mathbf{4}}$ Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: **а)** в любом квадратике 2×2; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

Ответ. **а) 16; б) 32.**

$\boxed{\mathbf{5}}$ При каких k и b график линейной функции $y = kx+b$ параллелен прямой $2x + 3y = 5$ и проходит через точку $(0; -3)$?

Ответ. **При** $k = -\frac{2}{3}, b = -3$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Назовём *креативными* все натуральные числа, в которых сумма каждых двух цифр, стоящих через одну, делится на 5. Сколько существует шестизначных креативных чисел, оканчивающихся на

6?

Ответ. **144.**

$\boxed{\textbf{7}}$ Найдите наименьшее значение выражения $x^2+2x+4y^2+4y+5$.

Ответ. **3.**

$\boxed{\textbf{8}}$ Биссектриса треугольника образует с его сторонами углы 30° и 45°. Найдите углы треугольника.

Ответ. $15^\circ, 60^\circ, 105^\circ$.

$\boxed{\textbf{9}}$ Назовём натуральное число *возрастающим*, если каждая его цифра, начиная со второй, больше предыдущей. Каких возрастающих чисел больше: 4-значных или 5-значных, и на сколько? Число не может начинаться с нуля.

Ответ. **Их поровну.**

$\boxed{\textbf{10}}$ В футбольном турнире участвовало пять команд. Каждая пара команд должна была сыграть ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями часть игр отменили. Оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно, если за победу начислялось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0?

Ответ. **6 игр.**