Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Математический кружок

(7 класс, I полугодие)

Составители: Е. А. Асташов, Я. А. Верёвкин, А. А. Дейч, С. М. Саулин, А. В. Феклина

Часть II: методические указания

Москва, 2017

Математический кружок (7 класс, I полугодие). Часть II: методические указания / Универсальная методическая разработка для элективного курса по решению нестандартных задач в средних общеобразовательных учреждениях г. Москвы // Сост. Е. А. Асташов, Я. А. Верёвкин, А. А. Дейч, С. М. Саулин, А. В. Феклина. — М.: МГУ, 2017.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы.

Содержание

Общие указания по проведению кружка **4**

Листок 1. Письменная работа **6**

Листок 2. Задачи для знакомства **10**

Листок 3. Кубы и кубики **13**

Листок 4. Переправы **16**

Листок 5. Последняя цифра **19**

Листок 6. Календарь **22**

Листок 7. Признаки делимости на 3 и 9 **25**

Листок 8. Разрежьте квадрат **28**

Листок 9. Двигайся и работай! **32**

Листок 10. Рыцари, лжецы и телепаты **35**

Листок 11. Переливания **39**

Листок 12. Проценты **42**

Листок 13. Можно или нельзя? **44**

Листок 14. Задачи про часы **47**

Листок 15. Шахматные задачи **51**

Общие указания по проведению кружка

Методическая разработка состоит из тридцати листочков с задачами. Листочки из части I предназначены для распечатывания и выдачи участникам кружка. Здесь же, в части II, приведены ответы и решения к задачам, указания, советы, идеи и примеры разного рода, которые могут оказаться полезными при использовании этой разработки. Конечно, мы не предлагаем буквально следовать всем этим советам!

На первых двух занятиях кружка руководителю важно примерно понять общий уровень участников и степень их знакомства с отдельными темами. Для этого на «нулевом» занятии кружка мы предлагаем провести письменную работу с задачами по разным темам, которую затем надо проверить (ниже даются критерии проверки по предложенным задачам) и подвести статистику решения задач — не только по каждому ученику, но и по каждой задаче. На первом занятии участникам выдаются проверенные работы, проводится разбор задач и типичных ошибок при решении. Затем школьникам выдаётся ещё один листочек с задачами по разным темам («Знакомство»), и занятие проводится уже по обычной схеме (см. ниже). На этом занятии школьники привыкают к формату проведения кружка, а руководитель продолжает оценивать знания и способности школьников (в частности, умение излагать свои мысли устно).

Занятие по листочку проводится по следующей схеме.
До занятия руководитель кружка решает сам все задачи, которые он собирается предложить детям. При этом важно подумать о том, как будут подходить к решению этих задач ваши ученики. Если решение задачи требует знаний по школьной программе, которых у ваших учеников пока нет, такую задачу давать на кружке ни в коем случае не следует.

В начале занятия можно **разобрать некоторые задачи предыдущего занятия** — если об этом просят школьники или если руководитель кружка считает нужным это сделать.

- Разбирать абсолютно все задачи не нужно — лучше обратить внимание на те задачи, при решении которых школьники допускали много ошибок или над которыми школьники долго думали, но не дошли до полного решения.
- Отдельные задачи, которые являются ключевыми по данной теме, стоит разбирать у доски. Если многие на них застряли, то стоит дать подсказку или даже разобрать эти задачи у доски в середине занятия. Если такую задачу не решило меньшинство школьников — с ними можно её обсудить индивидуально или разобрать её у доски в конце занятия.
- Разбор задач, по нашему мнению, лучше проводить именно в начале следующего занятия, а не на том же занятии, на котором задачи были даны: так у школьников останется возможность ещё подумать над задачами дома (в качестве необязательного домашнего задания). Обязательных домашних заданий на кружке мы не советуем задавать.

Затем руководитель кружка **объясняет новую тему**. В комментариях к каждому листочку написано, чтó мы рекомендуем рассказывать школьникам в начале каждого занятия.

- Если тема близка к школьной программе и не требует никаких дополнительных знаний, всё равно полезно бывает напомнить необходимые определения и факты.
- В начале занятия стоит не только объяснять теорию, но и разбирать две-три несложные задачи по теме у доски «для разгона» (примеры таких задач мы тоже приводим в комментариях, но вы можете подобрать и свои — по своему вкусу и в зависимости от уровня ваших учеников). Эти задачи следует подбирать так, чтобы на сравнительно простых примерах проиллюстрировать применение нового метода или использование нового понятия.
- В листочках по некоторым темам есть формулировки теорем, которые надо обсуждать и разбирать на примерах в начале занятия. Доказывать эти теоремы в начале занятия необязательно и иногда даже вредно (на это уходит много времени от занятия). Часть

этих теорем доказывается в школьном курсе математики. Некоторые теоремы предлагается доказать в качестве одной из задач листочка (иногда для решения этой задачи нужно сначала решить несколько предшествующих ей «наводящих» задач, поэтому такие задачи обычно стоят ближе к концу листочка). Однако в первую очередь (особенно для не очень сильных школьников) важнее не досконально разобраться в доказательстве самой теоремы, а научиться её применять при решении задач.

После объяснения новой темы:

- каждому участнику кружка выдаётся распечатанный листок с условиями задач;
- школьники самостоятельно думают над задачами;
- руководитель кружка и его помощники (если они есть) индивидуально принимают решения задач;
- если решение неверно, школьнику предлагается подумать ещё и исправить недочёты;
- если решение верно, школьник получает «плюсик» и поздравления (Молодец!);
- **не нужно** ставить оценки.

Мы категорически не советуем:

- делать занятия кружка обязательными для посещения;
- проводить на кружке проверочные и контрольные работы;
- стремиться подготовить детей к определённому виду соревнований / олимпиад;
- стремиться объяснить детям решения абсолютно всех задач разработки;
- читать указания и решения к задачам, не прорешав их самостоятельно.

Плюсики за решённые задачи обычно записываются в специальную табличку. Без неё вполне можно и обойтись, но, во-первых, она даёт возможность руководителю кружка анализировать статистику решения задач, а во-вторых — детям приятно получить «плюсик».

Основная цель каждого занятия кружка в том, чтобы дети самостоятельно придумали решения нескольких нестандартных задач и испытали **радость**. Поэтому не стоит расстраиваться, если некоторые задачи вы не успеете разобрать или никто из детей не дойдёт до самых последних задач. Мы считаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2-3 задачи и ещё по 1-2 задачам у него будут какие-то полезные соображения, то это уже хороший результат.

Что делать, если задачи окажутся слишком сложными для ваших учеников? Мы ни в коем случае не советуем превращать занятие кружка в разбор всех задач у доски. Иногда можно давать подсказки (как индивидуально, так и у доски) — некоторые конкретные советы мы приводим ниже. Если большинство предложенных задач слишком трудны, мы советуем подбирать к каждому занятию несколько задач попроще.

При выборе задач в первую очередь руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших детей** — задачи должны нравиться вам и должны пусть и не сразу, но без существенных подсказок получаться у ваших детей.

Желаем успеха!

Листок 1. Письменная работа

Основная цель письменной работы — получить представление о том, какие темы и в какой степени знакомы школьникам. Если у большинства учащихся нет опыта в решении олимпиадных задач, то рекомендуется пропустить письменную работу и начать занятия сразу со «Знакомства». В этом случае письменную работу можно провести в середине учебного года для проверки того, насколько хорошо и полно учащиеся способны изложить свои решения самостоятельно. После письменной работы (на следующем занятии кружка) все задачи стоит разобрать у доски.

$\boxed{1}$ Известно, что $a + b = 20$ и $b - c = 10$. Найдите $a + c$.

Ответ. **10.**

Решение. Самый изящный, на наш взгляд, способ: $a+b-(b-c) = a+b-b+c = a+c = 20-10 = 10$. Другой способ, который, скорее всего, предложат школьники: из второго условия следует, что $b = c + 10$, значит, $a + b = a + c + 10 = 20$, откуда $a + c = 10$. ☐

• *Подбор одной подходящей тройки чисел (a, b, c) не является решением, поскольку возникает вопрос: а если подобрать другую подходящую тройку чисел, для неё ответ будет таким же или не обязательно? На это нужно обратить внимание школьников при разборе задач.*

$\boxed{2}$ Трое преподавателей спорили, кто из них самый строгий. Андрей сказал: «Я самый строгий. Даниил не самый строгий». Николай сказал: «Андрей не самый строгий. Я самый строгий». Даниил сказал: «Я самый строгий». Оказалось, что все утверждения самого строгого преподавателя истинны, а все утверждения остальных преподавателей ложны. Так кто же из них самый строгий?

Ответ. **Андрей.**

Решение. Пусть сначала Андрей самый строгий. Тогда он говорит правду, а остальные лгут, и всё сходится. Этот случай возможен.

Пусть теперь Николай самый строгий. Но тогда Даниил не самый строгий, то есть второе утверждение Андрея истинно, чего быть не может. Значит, Николай не самый строгий.

Наконец, пусть Даниил самый строгий. Но тогда Андрей не самый строгий, то есть первое утверждение Николая истинно, чего быть не может. Значит, Даниил не самый строгий.

Таким образом, первый из разобранных случаев — единственно возможный. ☐

• *Решение, в котором разобран только первый случай и не доказано, что остальные два случая невозможны, решением не является, так как не доказывает, что найденный случай — единственно возможный.*

• *Решение, в котором разобраны два невозможных случая и не проверяется, что оставшийся случай возможен, также формально не является полным. По письменной работе вряд ли удастся понять, была ли проведена проверка для оставшегося случая (поскольку школьники вполне справедливо считают такую проверку очевидной и не считают нужным о ней упоминать в письменном решении), поэтому такие решения стоит засчитать как верные, но на необходимость проверки нужно указать во время разбора задач.*

$\boxed{3}$ Три одинаковых игральных кубика уложены друг на друга так, как показано на рисунке 1. Соседние кубики приложены друг к другу одинаковыми гранями. Сколько точек на нижней грани самого нижнего кубика? Ответ обоснуйте.

Примечание: в этой задаче сумма чисел на противоположных гранях кубиков не обязательно равна 7, как на «правильных» игральных кубиках.

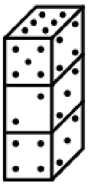


Рис. 1. К задаче 3.

Ответ. **Одна.**

Решение. На грани, противоположной шестёрке (то есть на нижней грани верхнего кубика), не может находиться ни четвёрка, ни пятёрка — на верхнем кубике они соседствуют с шестёркой. На верхней грани среднего кубика такое же число, как на нижней грани верхнего кубика, и это не может быть ни двойка, ни тройка. Значит, на этой грани может быть только единица. Тогда на нижней грани среднего кубика и верхней грани нижнего кубика — шестёрки (напротив единицы), а на нижней грани нижнего кубика — единица. ☐

- *Заметим, что для ответа на вопрос задачи видимые грани нижнего кубика не понадобились.*
- *По картинке можно однозначно восстановить устройство кубиков: напротив четвёрки располагается двойка, а напротив тройки — пятёрка.*

$\boxed{4}$ В июле некоторого года было четыре понедельника и четыре пятницы. Каким днём недели могло быть 15 июля указанного года? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ. **Вторником.**

Решение. В июле 31 день, а 15 и 29 июля приходятся на тот же день недели, что и 1 июля. Если 1 июля — понедельник, суббота или воскресенье, то в июле 5 понедельников. Если 1 июля — среда, четверг или пятница, то в июле 5 пятниц. Значит, июль может начинаться только со вторника. В этом случае в нём и в самом деле 4 понедельника и 4 пятницы, а 15 июля приходится на тот же день недели, что и 1 июля, то есть на вторник. ☐

- *Если школьник доказал только, что 1 июля может быть вторником, но не доказал, что оно не может быть другим днём недели, то задача не решена, потому что не доказано отсутствие других вариантов. Во время разбора задач стоит сказать школьникам, что на самом деле условия очень многих задач по математике подразумевают фразу «Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет». Поэтому, найдя один подходящий ответ, нужно всегда проверять, есть ли другие.*

$\boxed{5}$ Есть 20 роз, 9 тюльпанов и 8 астр. Сколько существует способов составить букет из 21 цветка? Ответ обоснуйте.

Ответ. **89 способов.**

Решение. Чтобы составить букет, достаточно выбрать, сколько в нём будет тюльпанов и сколько астр, а недостающие до 21 цветы сделать розами. Есть 10 способов выбрать количество тюльпанов (от 0 до 9). Для каждого способа выбрать количество тюльпанов есть по 9 способов выбрать количество астр (от 0 до 8). Итого получаем $10 \cdot 9 = 90$ способов выбрать количество тюльпанов и астр. Однако один из этих способов (когда тюльпанов и астр 0) не подходит, так как роз всего 20, а в букете должен быть 21 цветок, и все они розами быть не могут. Поэтому остаётся только 89 подходящих способов выбрать количество тюльпанов и астр, а значит, и составить букет. ☐

- *Полный перебор засчитывается как верное решение. Если не хотите принимать такие решения, увеличьте числа в условии задачи (например, можно вместо чисел 20, 9, 8 и 21 взять 200, 99, 101 и 201) так, чтобы выписать полный перебор школьникам за разумное время не удалось, да и не захотелось.*
- *При разборе решения этой задачи обратите особое внимание на объяснение того, почему числа 10 и 9 надо перемножать, а не складывать. Этому вопросу далее будет посвящено несколько задач по теме «Комбинаторика».*

$\boxed{6}$ Рита, Люба и Варя решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решённую задачу девочка, решившая её первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Может ли быть, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, если одновременных решений не было?

Ответ. **Не могло.**

Решение. За каждую задачу девочки в сумме должны получить 7 конфет. Значит, общее количество полученных ими конфет должно делиться на 7. Но по условию задачи это количество должно быть равно $20 \cdot 3 = 60$, а 60 не делится на 7. Значит, описанная в условии ситуация невозможна. $\square$

$\boxed{7}$ Может ли прямая пересекать все стороны: **а)** 10-угольника, **б)** 11-угольника, при этом не проходя через его вершины? Ответы обоснуйте.

Ответ. **а) Да; б) нет.**

Решение. **а)** Пример 10-угольника и прямой — на рисунке 2. Для построения примера существенно, что 10-угольник должен быть невыпуклым. Можно придумать и принципиально другие примеры.

б) Проведём доказательство от противного: предположим, что для некоторого 11-угольника искомая прямая существует. Контур любого многоугольника делит плоскость на две непересекающиеся области — внутреннюю и внешнюю. (На самом деле это нетривиальное утверждение, известное под названием теоремы Жордана, но мы будем считать его очевидным.) Отметим на прямой все точки её пересечения со сторонами 11-угольника — всего 11 точек. Они делят прямую на 12 частей: два луча и 10 отрезков. Половина этих частей (части, идущие через одну) должна находиться внутри 11-угольника, а другая половина — снаружи. Это следует из того, что если прямая не проходит через вершины 11-угольника, то каждый раз, пересекая границу многоугольника, мы будем попадать из внешней области во внутреннюю или наоборот. Отсюда следует, что один из двух лучей лежит внутри многоугольника, что противоречит ограниченности многоугольника. Значит, наше предположение неверно, и ситуация, описанная в условии, невозможна.

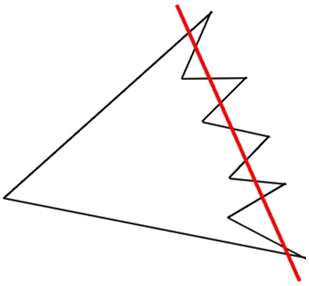


Рис. 2. К задаче 7б.

$\square$

• *Решение пунктов а и б следует оценивать отдельно. Это две идейно разные задачи, хоть и с общим сюжетом: одна — задача на построение примера, а другая — на доказательство невозможности с помощью инварианта.*

• *При разборе задач можно показать несколько примеров для пункта а — например, тот, что приведён выше, и все принципиально другие примеры, которые школьники придумают самостоятельно (во время работы, дома или после того, как показан первый пример).*

$\boxed{8}$ В офисе каждый компьютер был соединён проводами ровно с 5 другими компьютерами. После того, как часть компьютеров поразил вирус, все провода от заражённых компьютеров отключили (всего пришлось отключить 26 проводов). Теперь каждый из незаражённых компьютеров соединён проводами только с 3 другими. Сколько компьютеров поразил вирус?

Ответ. **8 компьютеров.**

Решение. Пусть m компьютеров заражено, а n — нет. Тогда до заражения было $5(m+n)/2$ проводов, а после отключения их осталось $3n/2$ (отсюда, в частности, следует, что n чётно). Рразность этих чисел равна 26, откуда $5m + 2n = 52$. Это уравнение имеет два решения в натуральных числах, в которых n чётно (доказать это можно перебором): $m = 4$, $n = 16$ и $m = 8$, $n = 6$. Первый вариант не годится: даже если бы все зараженные компьютеры были соединены проводами только со здоровыми, то пришлось бы отключить максимум $4 \cdot 5 = 20$ проводов, а не 26. Второй вариант годится: можно построить пример.

Пример можно построить следующим образом. Обозначим $n = 6$ здоровых компьютеров буквами A, B, C, D, E, F, а $m = 8$ заражённых пронумеруем цифрами от 1 до 8. Соединим здоровые компьютеры так: AB, BC, CD, DE, EF, FA, AD, BE, CF. При этом каждый будет соединён проводами с тремя другими, а проводов будет $3n/2 = 9$. Теперь добавим по два провода от здоровых компьютеров к заражённым: соединим A и B с 1 и 2 каждый, C и D — с 3 и 4 каждый, E и F — с 5 и 6 каждый. Затем каждый из заражённых компьютеров 1–4 соединим с компьютерами 7 и 8, а также соединим между собой: 12, 25, 53, 34, 46, 61, 56, 78. Теперь каждый из здоровых компьютеров соединён с тремя другими здоровыми и двумя заражёнными, каждый из заражённых компьютеров 1–6 соединён с двумя здоровыми и тремя другими заражёнными, а заражённые компьютеры 7 и 8 соединены с пятью другими заражёнными каждый. Таким образом, построенный пример удовлетворяет условию. ☐

- *Решение, в котором получены оба случая* $m = 4$, $n = 16$ *и* $m = 8$, $n = 6$, *но не указано, почему первый из них не подходит, можно оценить в* 0,5 *балла.*
- *Решение, содержащее все вышеописанные шаги, кроме примера для случая* $m = 8$, $n = 6$, *можно засчитывать как верное. Однако во время разбора задач следует обратить внимание школьников на необходимость этого примера для полноты решения. («Мы заметили, что первый случай по некоторым причинам не подходит. Может быть, и второй случай по какой-то причине невозможен? Чтобы удостовериться, что он возможен, нужно построить пример.»)*
- *Чтобы разобраться в приведённом выше примере, его полезно изобразить, обозначая разными цветами провода разных типов («здоровый – здоровый», «здоровый – заражённый», «заражённый – заражённый»). Школьникам, увидевшим готовый пример, полезно попробовать придумать свой собственный.*

Листок 2. Задачи для знакомства

Данный листок содержит подборку задач по разным темам. Цель занятия — познакомить учащихся с различными типами задач, от конструирования примеров до решения содержательных задач по предстоящим темам. Устная сдача задач позволяет оценить не только качество решения задачи, но и способность устно объяснить это решение принимающему. Также это занятие можно рассматривать как дополнение или замену письменной работы — для получения представления об общем уровне учащихся и степени их знакомства с различными темами.

$\boxed{1}$ На новой картине Казимира Малевича «Круги и квадраты» изображено 19 синих фигур и 16 зелёных (других красок у Малевича не нашлось). При этом кругов нарисовано в 6 раз больше, чем квадратов. Сколько кругов нарисовал Малевич?

Ответ. 30 **кругов.**

Решение. Всего фигур 35; квадраты составляют седьмую часть от общего количества. Значит, квадратов 5, а кругов 30. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте посчитать общее число фигур. А какую часть от них составляют квадраты?*

$\boxed{2}$ На доске написано число 23. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число окажется на доске через час?

Ответ. **16.**

Решение. Выпишем первые несколько чисел, появляющихся на доске: 23 – 18 – 20 – 12 – 14 – 16 – 18 и далее по циклу (цикл по 5). Через час как раз будет заканчиваться 12-й цикл, и на доске будет написано число 16. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте воспроизвести этот процесс сами. Заметили закономерность?*

$\boxed{3}$ Найдите наименьшее натуральное число: **а)** кратное 10, сумма цифр которого равна 10;**б)** кратное 100, сумма цифр которого равна 100; **в)** кратное 5, сумма цифр которого равна 25.

Ответ. **а)** 190 **б)** 199999999999 **(**11 **девяток) в)** 2995**.**

Решение. **а)** Чтобы число делилось на 10, оно должно оканчиваться на 0. Если число будет двузначным с нулём на конце, то его сумма цифр будет не больше 9. Значит, число должно быть по крайней мере трёхзначным. Наименьшим из трёхзначных чисел с указанными свойствами будет то, у которого в разряде сотен стоит единица. Чтобы сумма цифр этого числа была равна 10, в разряде десятков у него должна стоять девятка. Получаем число 190.

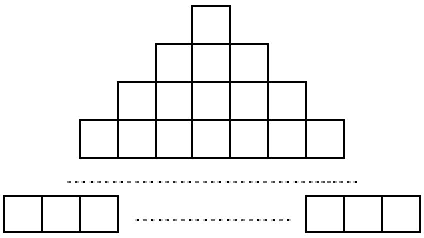
б) Чтобы число делилось на 100, оно должно оканчиваться двумя нулями. Если число будет не более чем 13-значным с двумя нулями на конце, то (поскольку каждая цифра не больше 9) сумма его цифр будет не больше 99. Значит, число должно быть по крайней мере 14-значным. Из 14-значных чисел с указанными свойствами наименьшим числом будет то, у которого в старшем разряде единица. Тогда остальные его цифры (кроме двух нулей на конце) должны быть девятками, и это будет число 19999999999900 (11 девяток).

в) Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться нулём или пятёркой. Если число не более чем трёхзначное и оканчивается нулём или пятёркой, то сумма его цифр не больше $5 + 9 + 9 = 23$. Значит, число должно быть по крайней мере четырёхзначным. Среди четырёхзначных чисел с указанными свойствами наименьшим будет то, у которого в разряде тысяч стоит наименьшая цифра. Если там стоит единица, то сумма цифр числа не превосходит $1+9+9+5 = 24$. Значит, там должна стоять хотя бы двойка. В последнем случае сумма цифр 25 достижима, только если это число 2995. Остальные числа с указанными свойствами будут больше найденного. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

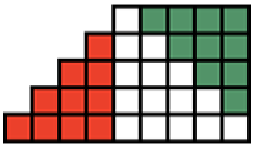
● **а)** *Какой признак делимости на 10? Попробуйте посмотреть на количество разрядов. Может ли такое число быть с одним разрядом? Двумя? А тремя? Обратите внимание, что число должно быть наименьшим.*
б) *Какой признак делимости на 100? Попробуйте посмотреть на количество разрядов. Аналогично пункту а) посмотрите на разряды. Какое количество разрядов минимально допустимо? Обратите внимание, что число должно быть наименьшим.*
в) *Какой признак делимости на 5? Аналогично пункту а) посмотрите на разряды. Какое количество разрядов минимально допустимо? Обратите внимание, что число должно быть наименьшим.*

$\boxed{4}$ На клетчатой бумаге нарисована фигура (см. рис.): в верхнем ряду — одна клеточка, во втором сверху — три клеточки, в следующем ряду — 5 клеточек, и так далее. Сколько всего в этой фигуре клеточек, если в ней: **а)** 5 рядов; **б)** 9 рядов; **в)** 2016 рядов?



Ответ. $2016^2 = 4064256$

Решение. Число клеток в k-м ряду фигуры равно k-му нечётному числу. Значит, площадь такой фигуры из n рядов равна сумме первых n нечётных чисел. **а)** $1+3+5+7+9=25$. **б)** Девятое нечётное число — это число 17. Ну и $1+3+5+...+17 = \frac{(1+17)\cdot 9}{2} = 81$. **в)** Заметим, что число клеток в такой фигуре всегда равно квадрату числа рядов. Это легче всего заметить геометрически (см. рисунок). В частности, если фигура состоит из 2016 рядов, то количество клеток в ней равно $2016^2 = 4064256$. □

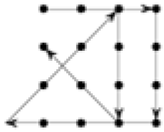


○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте посчитать количество клеток в 3-м ряду. А 4? А k-м? Дополнительно для пункта б): А как лучше суммировать сумму всех нечётных чисел? Напрямую тяжело, может, есть другой способ? Дополнительно для пункта в): А если посмотреть в общем, то как связаны число клеток и количество рядов?*

$\boxed{5}$ Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы полученная ломаная прошла через 16 точек, расположенных в узлах квадратной сетки 4×4?

Решение. См. рисунок. Начинаем из левого верхнего угла и движемся по стрелкам. Возможны и другие решения! □



○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте двигаться змейкой. Ломаная пересекаться может, но не в указанных точках.*

$\boxed{6}$ Имеется 68 монет, причём любые две отличаются по весу. За 100 взвешиваний найдите самую тяжёлую и самую лёгкую монету.

Решение. Разобьем монеты на 34 пары. За 34 взвешивания сравним монеты внутри пар и более тяжёлые отложим в одну кучу, а более лёгкие — в другую. Из «тяжёлой» кучи за 33 взвешивания выделим самую тяжёлую монету (при каждом взвешивании сравниваем две монеты, легкую отбрасываем, а тяжелую сравниваем со следующей...). Так же за 33 взвешивания из «лёгкой» кучи выделим самую лёгкую монету. $34 + 33 + 33 = 100$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте разбить монеты на разные кучки. Например, на пары. А если разделять кучи на более лёгкие и более тяжёлые? А если сравнивать по одной, оставляя самую тяжёлую?*

$\boxed{7}$ Бился Иван-Царевич со Змеем Горынычем, трёхглавым и трёххвостым. Одним ударом он мог срубить либо одну голову, либо один хвост, либо две головы, либо два хвоста. Но, если срубить один хвост, то вырастут два; если срубить два хвоста — вырастет голова; если срубить голову, то вырастает новая голова, а если срубить две головы, то не вырастет ничего. Как должен действовать Иван-Царевич, чтобы срубить Змею все головы и все хвосты как можно быстрее?

Ответ. **Это можно сделать за 9 ударов.**

Решение. Это можно сделать за 9 ударов. Например, так: $(3,3) \to (4,3) \to (5,3) \to (6,3) \to (4,4) \to (2,5) \to (6,0) \to (4,0) \to (2,0) \to (0,0)$. (Каждая пара чисел — это число голов и хвостов, оставшихся у Змея после очередного удара с учётом тех хвостов и голов, которые только что выросли.) Теперь докажем, что этого нельзя сделать быстрее. Иван-Царевич может использовать удары трёх типов: A) отрубить два хвоста, вырастет одна голова; B) отрубить две головы; C) отрубить один хвост, вырастет два хвоста (по сути — просто добавить один хвост). Отрубать одну голову бесполезно, поэтому такие удары использовать не будем.

1. Число ударов типа A должно быть нечётным. В самом деле, только при таких ударах меняется чётность числа голов. А чётность числа голов должна измениться: сначала их было 3, а в конце должно остаться 0. Если же таких ударов сделать чётное число, число голов останется нечётным (и значит, не будет равно нулю).
2. Так как только ударами типа A можно уменьшить число хвостов, одного такого удара не хватит. Поэтому таких ударов должно быть не меньше двух, а с учётом предыдущего пункта их должно быть хотя бы три.
3. После трёх ударов типа A вырастет три новых головы, и всего нужно будет отрубить 6 голов. Для этого потребуется хотя бы 3 удара типа B.
4. Чтобы отрубить 3 раза по два хвоста ударами типа A, нужно иметь 6 хвостов. Для этого нужно «вырастить» три дополнительных хвоста, сделав 3 удара типа C.

Итак, нужно сделать не менее трёх ударов каждого из указанных типов; всего — не менее 9 ударов. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какие есть типы ударов по изменению количества хвостов/голов? Какие из них бесполезны? Количество каких типов ударов должно быть только чётным или нечётным? Сколько минимум должно быть каждого типа ударов?*

○ `Если ученик дал правильный ответ, но не доказал минимальность.`

● *А почему это наиболее быстро? Требуется строгое доказательство.*

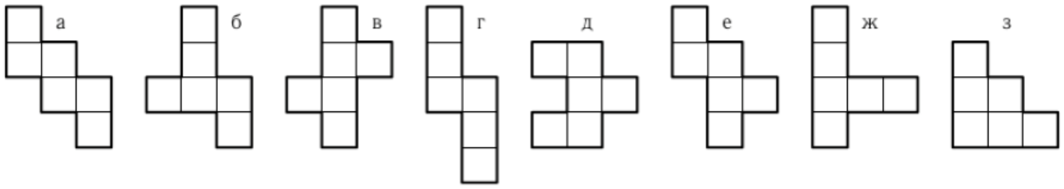
○ `Если ученик дал неправильный ответ по быстроте, но порядок ударов верный.`

● *А почему это наиболее быстро? Требуется строгое доказательство.*

Листок 3. Кубы и кубики

В начале занятия полезно напомнить школьникам, что такое вершина, ребро и грань куба, и обсудить, сколько у него вершин, рёбер и граней. Кроме того, надо рассказать о том, что такое развёртка куба и какие они бывают (кроме самой известной развёртки в форме креста). Если большинство школьников до этого не сталкивались с развёртками, стоит подробно разобрать (на примере «крестовой» развёртки и одной из развёрток задачи 1), какие стороны развёртки склеиваются между собой при склейке куба из развёртки.

1 Какие из этих фигур можно сложить и получить куб, а какие — нельзя?



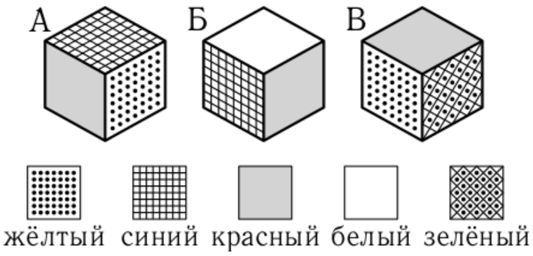
Ответ. **а, б, в, г, е — можно, остальные — нельзя.**

Решение. Чтобы обосновать ответ, школьники должны ответить на следующий вопрос: если вот эта вот грань будет нижней, а мы смотрим на куб сверху, то какая грань будет верхней, правой, левой, передней, задней. В случае ответа «нельзя» школьники должны объяснить, что получается, например, две «левых» грани. Это стоит объявить у доски. ☐

○ Ученик не знает, что делать.

● *Попробуйте ответить на вопрос: если вот эта грань будет нижней, а мы смотрим на куб сверху, то какая грань будет верхней, правой, левой, передней, задней.*

2 На рисунках А, Б, В изображён один и тот же куб. Грань какого цвета расположена напротив красной?



Ответ. **Красная напротив красной (две красных).**

Решение. Из рис. А и Б следует, что красных или синих граней минимум две, а из рис. А и В — что красных или жёлтых граней минимум две. Поскольку используются все пять цветов, красная грань должна встречаться ровно два раза. Из рис. А и Б следует, что обе красные грани граничат с синей (на этих рисунках, очевидно, видны разные красные грани), значит, на рис. А вторая красная грань или сзади-слева, или сзади-справа. Из рис. В следует, что одна из красных граней граничит также с жёлтой, поэтому на рис. А вторая красная грань может быть только напротив видимой красной грани. От школьников требуем объяснения, а не просто ответа. ☐

○ Ученик не знает, что делать.

● *Подумайте, может, какой-то цвет грани могжет встречаться несколько раз? Сравните рисунки А и Б; рисунки А и В. Какой вывод можно сделать?*

3 Сложите куб $3 \times 3 \times 3$ из красных, жёлтых и синих кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы в любом бруске $1 \times 1 \times 3$ были кубики всех цветов.

Решение. Необходимо рисовать три «этажа» куба и отмечать цвета на каждом из них, чтобы было легче воспринимать. Ну а дальше всё делается примерно так, как обычно рисуют трёхцветную раскраску: в каждом следующем блоке $1 \times 1 \times 3$ цвета циклически сдвигаются по сравнению с соседними блоками. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Посоветуйте школьникам рисовать три «этажа» куба и отмечать цвета на каждом из них, чтобы было легче воспринимать. Попробуйте делать циклический сдвиг в каждом блоке.*

$\boxed{4}$ Два куба $3 \times 3 \times 3$ имеют: **а)** ровно один общий кубик; **б)** ровно два общих кубика. В каждом из этих случаев определите, из скольких кубиков состоит такая фигура и из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры.

Ответ. **а)** 53 **кубика,** 102 **квадратика. б)** 52 **кубика,** 98 **квадратиков.**

Решение. **а)** Каждый куб состоит из $3^3 = 27$ кубиков. Однако, если просто сложить $27 + 27$, то общий кубик будет посчитан дважды, поэтому его надо ещё один раз вычесть: итого получится $27 + 27 - 1 = 53$ кубика. Поверхность каждого куба состоит из 6 граней по $3 \cdot 3 = 9$ квадратиков — итого 54 квадратика. Однако из-за того, что у двух кубов есть один общий угловой кубик, этот общий кубик оказывается внутри полученной фигуры, а площадь поверхности каждого из кубов уменьшается на 3 квадратика. Итого получаем $54 + 54 - 3 - 3 = 102$ квадратика.
б) Подсчёт по аналогии с пунктом а) даёт $27 + 27 - 2 = 52$ кубика и $54 + 54 - 5 - 5 = 98$ квадратиков. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько кубиков в одном кубе* $3 \times 3 \times 3$*? А в двух? А больше или меньше станет кубиков, если у двух кубов один кубик будет общим? На сколько их станет меньше?*

○ `Ученик ответил на вопрос про кубики, но не может ответить на вопрос про квадратики.`

● *Чему равна площадь поверхности одной грани куба? А поверхности всего куба? А двух отдельных кубов? А больше или меньше станет площадь поверхности, если у двух кубов один кубик будет общим? Какие квадратики с поверхности каждого из исходных кубов окажутся внутри фигуры?*

$\boxed{5}$ **а)** Какое наименьшее число прямолинейных разрезов нужно сделать, чтобы разрезать куб $3 \times 3 \times 3$ на маленькие кубики $1 \times 1 \times 1$? После каждого разреза полученные части можно перекладывать как угодно.**б)** Тот же вопрос для куба $4 \times 4 \times 4$.

Ответ. **а)** 6 **разрезов; б)** 6 **парезов.**

Решение. **а)** 6 разрезов: по два параллельно каждой грани куба (тут и перекладывать ничего не надо). Обойтись меньшим числом разрезов нельзя: чтобы получился центральный кубик $1 \times 1 \times 1$, нужно «создать» ему 6 граней с помощью разрезов, а создать одним прямолинейным разрезом сразу несколько его граней невозможно. б) Тоже 6 разрезов. А вот здесь надо перекладывать: режем куб пополам, потом два получившихся бруска $4 \times 4 \times 2$ кладём рядом в виде бруска $8 \times 4 \times 2$ и делаем разрез перпендикулярно самому короткому ребру. Затем снова складываем исходный куб из полученных частей и проделываем аналогичные разрезы по двум другим направлениям. Минимальность доказывается аналогично пункту а. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● **а)** *Можно ли обойтись числом разрезов меньшим, чем 6? Обратите внимание на центральный кубик. Сколько у него должно быть граней? Можем ли мы создать ему больше одной грани с помощью одного разреза?* **б)** *Попробуйте перекладывать куски кубика после нескольких разрезов.*

$\boxed{6}$ Муравей сидит в вершине бумажного куба. Как ему доползти до противоположной вершины куба кратчайшим путём?

Решение. Рисуем путь на развёртке: он там будет выглядеть как диагональ прямоугольника 1×2 и пройдёт через середину ребра куба. Стоит обратить внимание на то, что одна и та же вершина куба соответствует нескольким различным точкам на развёртке, но длина кратчайшего пути для всех этих точек одна и та же. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте рисовать путь на развёртке. Какой кратчайший путь между двумя точками на плоскости?*

$\boxed{7}$ Дан куб $2\times2\times2$. Можно ли наклеить на его поверхность без наложений 10 квадратов 1×1 так, чтобы никакие два квадрата не граничили по отрезку (по стороне или её части)? Квадраты могут иметь общие вершины. Перегибать квадраты нельзя.

Ответ. **Можно.**

Решение. Берём «крестовую» развёртку куба. Четыре квадрата 2×2, выстроенных в одну линию, красим в шахматном порядке (то есть на каждый из них клеим два квадрата 1×1, которые соприкасаются углами в центре грани). Итого наклеено 8 квадратов на грани, образующие «пояс» куба. На остальные две грани клеим по одному квадрату (например, прямо по центру). □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте посмотреть на развёртку куба. А если её раскрасить в шахматном порядке?*

$\boxed{8}$ Какое наибольшее число брусков $1\times2\times2$ можно уместить в кубе $3\times3\times3$ без пересечений?

Ответ. **Можно уместить 6 штук.**

Решение. Куб состоит из $3^3=27$ кубиков $1\times1\times1$, а брусок — из $1\cdot2\cdot2=4$. Поскольку $27=6\cdot4+3$, больше 6 брусков уместить в кубе не удастся.

Пример на 6 брусков показан на рисунке ниже. Здесь куб изображён в виде «планов» трёх «этажей». Цифра в кубике означает номер бруска, которым этот кубик занят. Кубики, обозначенные буквой x, — пустые.

x	2	2		4	2	2		4	6	6
1	1	3		4	x	3		4	6	6
1	1	3		5	5	3		x	5	5

□

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Если смотреть только на объём, то сколько можно их максимум разместить? Теперь осталось придумать пример.*

Листок 4. Переправы

В начале занятия стоит обсудить с ребятами удобный способ записи задач на переправы(схемами), когда рисуется река, а дальше «рисуется» каждое действие (лодка с подписанными персонажами и подписи тех, кто остается на берегах). Стоит обратить внимание ребят на то, что если задачу не получается решить сразу, то можно совсем подробно разобрать все возможные варианты первых нескольких ходов.

Можно разобрать в качестве примера простую классическую задачу. *Крестьянину надо перевезти через речку волка, козу и капусту. Лодка вмещает одного человека, а с ним либо волка, либо козу, либо капусту. Если без присмотра оставить козу и волка, волк съест козу. Если без присмотра оставить капусту и козу, коза съест капусту. Как крестьянину перевезти свой груз через речку?* Обозначим: К — крестьянин, Ка — капуста, Ко — Коза, В — волк. Кто кого ест: В ест Ко, а Ко ест Ка. (1) ККо туда, Ко остаётся, К обратно; (2) КВ туда, В остаётся, ККо обратно; (3) ККа туда, Ка остаётся, К обратно; (4) ККо туда.

$\boxed{1}$ **Космическая переправа.**Юпитерианский фермер с выводком неразлучных звёздочек, пучеглазой гусеницей и хищным четырёхглазом должен переправить всех своих питомцев на ярмарку. В корабль вместе с ним может поместиться либо выводок, либо гусеница, либо четырёхглаз. Оставшись без присмотра, гусеница съест звёздочек, а четырёхглаз — гусеницу. Как фермеру переправить всех без потерь?

Решение. Обозначим: Ф — фермер, З — звёздочки, Г — гусеница, Ч — четырёхглаз. Кто кого ест: Ч ест Г, а Г ест З. (1) ФГ туда, Г остаётся, Ф обратно; (2) ФЧ туда, Ч остаётся, ФГ обратно; (3) ФЗ туда, З остаётся, Ф обратно; (4) ФГ туда. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Смотри, а сильно ли отличается эта задача от той, которую мы только что разобрали на доске? Давай еще раз посмотрим, кто кого ест. Тогда кого нам точно нужно увезти первым? Теперь давай перевезем еще кого-нибудь. Можно ли их оставить на том берегу вдвоем? Нет, тогда давай увезем обратно первого. Что можно сделать дальше?*

$\boxed{2}$ К реке одновременно подошли два вора: к левому берегу — вор с одним баулом, к правому — с двумя. Обоим нужно на противоположный берег. Нельзя, чтобы кто-нибудь оказался на берегу один с большим числом баулов, чем у него было изначально (тогда он скроется с этими баулами). У левого берега есть двухместная лодка (вмещает двух человек или человека и баул). Как ворам переправиться, сохранив свои баулы?

Решение. Будем называть вора с одним баулом первым, а с двумя — вторым. Первый переправляется со своим баулом на другой берег, оставляет свой баул, забирает один из баулов второго и возвращается. Затем оставляет баул второго и снова плывет на другой берег. Второй забирает свой второй баул и уплывает. Теперь все переправились туда, куда хотели. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Смотри, первый вор может приехать со своим баулом, а может без него. Кто тогда может плыть обратно? Может ли он взять с собой баул? Теперь он возвращается. Один или с каким-то баулом?*

$\boxed{3}$ Три жулика, каждый с двумя чемоданами, находятся на одном берегу реки, через которую они хотят переправиться. Есть трёхместная лодка, каждое место в ней может быть занято либо человеком, либо чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в своё отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Как им переправиться?

Решение. Пусть A, B, C — жулики, aa, bb, cc — их чемоданы. (1) $Ccc \rightarrow$, $C \leftarrow$; (2) $ABC \rightarrow$, $AB \leftarrow$; (3) $Aaa \rightarrow$, $AC \leftarrow$; (4) $ABC \rightarrow$, $B \leftarrow$; (5) $Bbb \rightarrow$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай переберем все возможные варианты первого действия. Сколько из них нам подходят? А что делать дальше, чтобы никто чужие чемоданы не украл?*

$\boxed{4}$ Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трёх человек. Беда в том, что стиральная машина тяжёлая, поэтому погрузить её в катер или вытащить из него можно только втроём. Как им переправиться?

Решение. A — человек, B — стиральная машина. Трое грузят в катер машину, AAB туда, A выходит, AB обратно, A садится, AAB туда, трое выгружают машину. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Можно ли сначала увезти кого-то на другой берег, а потом уже грузить машинку? Значит, с чего нужно начать? А можно ли выгрузить машинку обратно раньше, чем будут перевезены все люди?*

$\boxed{5}$ Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка маленькая: на ней может переправиться или один солдат, или двое мальчиков. Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке, а затем вернули её мальчикам в целости и сохранности. Как?

Решение. Пусть M_1, M_2 — мальчики, C — солдат. (1) M_1M_2 туда, M_1 остаётся, M_2 с лодкой обратно; (2) C туда, M_1 с лодкой обратно; (3) повторяем эти пункты, пока все солдаты не окажутся на другом берегу. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Смотри, если мы переправим одного солдата, мы сможем также переправить и остальных? Но если солдат переплыл реку, там уже должен быть мальчик, который уплывет на лодке обратно, так? А как сделать так, чтобы хотя бы один мальчик был на другой стороне, а лодка — на берегу с отрядом?*

$\boxed{6}$ К берегу Нила подошла компания из шести человек: три бедуина со своими женами. У берега находится лодка с вёслами, которая выдерживает только двух человек. Бедуин не может допустить, чтобы его жена находилась без него в обществе другого мужчины. Может ли вся компания переправиться на другой берег?

Ответ. **Да, может.**

Решение. Переправу можно осуществить следующим образом. Сначала жена первого бедуина отвозит жену второго. Затем возвращается, забирает жену третьего и снова возвращается. Уплывают второй и третий бедуины. Второй перевозит жену, забирает первого бедуина и уплывает на другой берег. Жена третьего садится в лодку и по очереди перевозит жен первого и второго. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Могут ли первыми уплыть мужчины? А мужчина и женщина? А две женщины? Кто тогда должен вернуться? Может ли во второй раз уплыть хотя бы один из мужчин? А кто тогда может? И так далее.*

$\boxed{7}$ **а)** К кабинке канатной дороги на гору подошли четверо с весами $50, 75, 75$ и 100 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка ходит туда-сюда только с грузом от 110 до 260 кг (в частности, пустой не ходит), при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более чем на 30 кг. Как им всем подняться на гору?
б) Пусть теперь подошли четверо с весами $50, 60, 70$ и 90 кг, а кабинка ходит только с грузом от 100 до 250 кг (в частности, пустой не ходит), при условии, что веса на скамьях отличаются не более, чем на 25 кг. Как им всем подняться на гору?

Решение. Пусть числа до запятой — люди, сидящие на первой скамье, а после запятой — на второй. **а)** (1) $(50+75{,}100)\to$; (2) $(75{,}100)\leftarrow$; (3) $(75{,}75)\to$; (4) $(50{,}75)\leftarrow$; (5) $(50+75{,}100)\to$. **б)**. (1) $(50+60{,}90)\to$; (2) $(50{,}60)\leftarrow$; (3) $(60{,}70)\to$; (4) $(90{,}70)\leftarrow$; (5) $(50,70)\to$; (6) $(50{,}60)\leftarrow$; (7) $(50+60{,}90)\to$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай попробуем, например, сначала переправить на тоу сторону человека, весящего* 50 *кг так, чтобы все остальные*(*и кабинка тоже*) *остались в результате на начальной стороне. Теперь давай увезем еще кого-нибудь. Кого можно оставить на той стороне? А с кем вернуться?*(*пункт* ***б)*** *— аналогично*)

$\boxed{8}$ Кощей взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван-Царевич выручать их. А Кощей ему и говорит:

— Пусть плывут отсюда на твоей лодке, но имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоём(три человека в лодку не влезают), а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Пленник не сядет в лодку с тем, кого считает оборотнем, а на берегу находиться сможет. На суше они будут молчать, а в лодке — рассказывать друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плыть нельзя. Когда все 43 окажутся на том берегу, одному можно будет за тобой вернуться. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Сможет ли Ивана спасти и себя, и пленников?

Ответ. **Да, сможет.**

Решение. Иван может разбить пленников на 20 пар и одну тройку и велеть Кощею сказать каждому, что все, кроме входящих с ним в одну пару (тройку), — оборотни. Тогда условие будет выполнено, а переправиться пленники смогут вот как. Назовём пленников из тройки A, B и C. Сначала переправляются A и B, потом A возвращается обратно. Затем переправляется некоторая пара, а возвращается B. В результате одна пара пленников переправлена на берег, а все остальные вместе с лодкой находятся на острове. Аналогично переправляются все остальные пары. Затем переправляются A и B, A возвращается и перевозит C. После этого C может отправиться за Иваном. При такой переправе никто никакой новой информации об оборотнях не узнает. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Про сколько человек пленник не будет думать, что они оборотни? Можно ли получить такую группу пленников, что друг друга они оборотнями не считают, и все могут перебраться на другой берег без участия других пленников? Сколько в такой группе может быть человек? А мы можем всех разделить на такие группы? А как теперь переправить по очереди несколько групп?*

$\boxed{9}$ 10 лямзиков весом 1,2, . . . ,10 кг хотят переправиться через реку на лодке, которая выдерживает не больше 10 кг. Смогут ли они это сделать, если каждый лямзик может грести не более двух раз? *(В лодке не обязательно гребут все!)*

Решение. Гребёт всегда первый: $9+1$ туда, 1 обратно, $8+2$ туда, 2 обратно, $7+3$ туда, 3 обратно, $6+4$ туда, 4 обратно, $4+3+2+1$ туда, 1 обратно, 10 туда, 2 обратно, $5+1+2$ туда. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько может одновременно в лодке находиться лямзиков? А как переправить на другой берег самого тяжелого? А следующего? А как лучше переправить остальных?*

Листок 5. Последняя цифра

Данный листок содержит подборку задач на нахождение последней цифры числа. Цель занятия — разобраться с тем, как меняется при вычислениях последняя цифра числа. В начале занятия стоит обсудить, как находится последняя цифра числа. Стоит разобрать простые примеры: а) последняя цифра суммы и разности чисел; б) последняя цифра произведения; в) обсудить, что с частным так не получается; г) последняя цифра числа, возведенного в степень.

$\boxed{1}$ Найдите последнюю цифру числа **а)**$1234567 + 9876543$; **б)**13579×8642, **в)**13^5, **г)**7^{19}.

Ответ. **а) 0. б) 8. в) 3. г) 3.**

Решение. Для подробного объяснения можно записывать числа в виде $10x + y$, где y — это последняя цифра числа. **а)** $....7 + ...3 = ...0$; **б)** $....9 \times ....2 = ...8$; **в)**$....3 \times ....3 \times ....3 \times ....3 \times ....3 = ...9 \times ....3 \times ....3 \times ....3 = ...7 \times ....3 \times ....3 = ...1 \times ....3 = ...3$, при разборе здесь стоит обратить внимание на то, что последняя цифра пятой степени такая же, как первой, и мы получили цикл длины 4; **г)**Расписываем первые несколько степеней аналогично предыдущему пункту, получаем цикл длины 4, и $7^4 = ...1$, затем последние цифры повторяются, чтобы найти последнюю цифру числа 7^{19}, представим в виде $7^{19} = 7^{4\times4+3} = ...1 \times 7^3 = ...3$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуй сначала просто посчитать. А теперь давай поменяем в вычислениях любые цифры, кроме последних, и посмотрим, меняется ли ответ.*

$\boxed{2}$ Найдите последнюю цифру числа **а)**2^{100}; **б)**2017^{2017}; **в)**$123456789^{987654321}$.

Ответ. **а) 6; б) 7; в) 1.**

Решение. **а)**$2^1 = ...2, 2^2 = ...4, 2^3 = ...8, 2^4 = ...6, 2^5 = ...2$, мы получили цикл длины 4, $100 = 4 \times 25$, а значит, $2^{100} = ...6$; **б)**$2017^1 = ...7, 2017^2 = ...9, 2017^3 = ...3, 2017^4 = ...1, 2017^5 = ...7$, мы получили цикл длины 4, $2017 = 4 \times 504 + 1$, а значит, $2017^{2017} = ...7$; **в)**$....9^1 = ...9, ...9^2 = ...1, ...9^3 = ...1$, мы получили цикл длины 2, $987654321 = 2 \times 293827160 + 1$, а значит, $123456789^{987654321} = ...9$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Распиши для маленьких степеней. Оставь только одну или две цифры от числа, убедись, что на последнюю цифру это не повлияет.*

$\boxed{3}$ В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $25321^{127} - 1$. Не опечатка ли это? (*Простое число* — это натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя.)

Ответ. **Опечатка.**

Решение. $....1 \times ....1 = ...1$, поэтому последняя цифра числа 25321^{127} равна 1, а числа $25321^{127} - 1$ — 0. Но тогда число будет делиться на 10(т.е. на 2 и на 5), а простое число не может нацело делиться ни на что, кроме себя самого и 1. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуй сначала найти последнюю цифру этого числа. А теперь давай подумаем, может ли число с такой последней цифрой быть простым. Не делится ли оно на что-нибудь?*

$\boxed{4}$ Делится ли число $47^{30} + 39^{50}$ на 10?

Ответ. **Да, делится.**

Решение. Аналогично предыдущим задачам, найдем последние цифры чисел 47^{30} и 39^{50}. Это будут 9 и 1, а значит, последней цифрой их суммы будет 0, и число будет делиться на 10. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *На какую цифру заканчивается первое слагаемое? А второе? А их сумма?*

$\boxed{5}$ В магазин привезли 206 литров молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов каждого вида?

Ответ. **7 бидонов по 10 литров и 8 бидонов по 17 литров.**

Решение. Общий объем будет $10x + 17y$ и равен 206 литров. Посмотрим на последнюю цифру суммы $10x+17y$. Ясно, что она зависит только от y, потому что число $10x$ всегда заканчивается нулем. Значит, нам нужно подобрать такое y, что $17y = ...6$ и $17y \leq 206$. Нам подходит только $y = 8$. $17\times8 = 136$, значит, $x = (206-136)/10 = 7$. Важно обращать внимание школьников на то, что мало просто подобрать правильный ответ, нужно еще доказать, что он единственный. ☐

○ `Ученик подбором нашёл ответ.`

● *Почему нет других вариантов? Или есть? А сколько могло быть бидонов каждого вида?*

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *На какую цифру будет оканчиваться общее количество литров? А на нее влияет количество десятилитровых бидонов? А сколько тогда должно быть семнадцатилитровых?*

$\boxed{6}$ Найдите последнюю цифру в произведении: **а)** всех простых чисел, не превосходящих 1234; **б)** всех нечётных простых чисел, не превосходящих 1234; **в)** всех нечётных чисел от 1 до 2017.

Ответ. **а) 0; б), в) 5.**

Решение. **а)** Заметим, что 2 и 5 — простые числа, которые меньше, чем 1234, а их произведение — это 10. Если любое натуральное число умножить на 10, последняя цифра у произведения будет 0. Поэтому и произведение всех простых чисел, меньших 1234, будет заканчиваться нулем. **б)**,**в)**Заметим, что оба этих произведения состоят только из нечетных чисел и содержат 5. А если 5 умножить на любое нечетное число, результат также будет оканчиваться на 5. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Проверь, какой будет последняя цифра, если перемножить только первые* 5 *или* 10 *простых чисел. А что будет, если перемножать дальше?*

$\boxed{7}$ Сколькими нулями оканчивается число $2017! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 2015 \times 2016 \times 2017$?

Ответ. **502.**

Решение. Число оканчивается на столько нулей, сколько раз его можно поделить на 10. А на 10 его можно поделить, если в его разложении на простые множители есть пара из 2 и 5. То есть, нам нужно посчитать количество таких пар в числе 2017!. Заметим, что каждое пятое число делится на 5. Таких чисел от 1 до 2017 будет $403(2017 = 403 \times 5 + 2)$. Из них каждое пятое делится на 25, это дает нам два множителя 5, то есть и два нуля в произведении. Таких чисел 80. Каждое 5 из них делится на 125, таких 16. И наконец,каждое 5 из них делится на 625, таких чисел еще 3. Итого мы получили $403 + 80 + 16 + 3 = 502$ пятерок в нашем произведении. Осталось убедиться, что нам хватит двоек. Но от 1 до 2017 есть 1008 четных чисел, этого нам будет достаточно. Значит, наше число будет заканчиваться на 502 нуля. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Что значит, что число заканчивается на* 0*? А на сколько нулей будет заканчиваться* 5!*,* 12!*,* 27!*?*

$\boxed{8}$ Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.

Решение. Для начала выпишем все цифры, которыми могут заканчиваться квадраты натуральных чисел. Это будут 0, 1, 4, 9, 6, 5 (чтобы это понять, нужно возвести каждую из цифр от 0 до 9 в квадрат и посмотреть, какие последние цифры встречаются у полученных результатов). У нас есть 5 квадратов произвольных натуральных чисел. Если два из них заканчиваются на одну и ту же цифру, то их разность оканчивается нулем, что нам и нужно. Если же все они различны, то это какие-то 5 из 6 возможных цифр. Значит, из чисел, оканчивающихся на 1,4, 6 и 9, может не быть только какого-то одного. Тогда обязательно найдется пара чисел, сумма которых будет оканчиваться нулем, так как $....1 + ...9 = ...0$ и $....4 + ...6 = ...0$, а это и есть делимость на 10. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какой цифрой может оканчиваться квадрат натурального числа? А в каком случае разность этих чисел делится на 10? А сумма?*

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найдите последнюю цифру числа **а)** $(7^7)^7$; **б)** 7^{7^7}.

Ответ. **а) 7; б) 3.**

Решение. **а)** Последняя цифра у числа 7^n меняется по циклу длины 4: 7, 9, 3, 1, дальше снова 7. Значит, 7^7 оканчивается цифрой 3. Последняя цифра у числа 3^n меняется по циклу длины 4: 3, 9, 7, 1. Значит, $....3^7$ оканчивается цифрой 7. **б)** Последняя цифра у числа 7^n меняется по циклу длины 4: 7, 9, 3, 1. Нам нужно понять, какой остаток при делении на 4 дает 7^7. Для этого достаточно посмотреть на последние две цифры числа 7^7. Оно оканчивается на 43. Значит, дает остаток 3 при делении на 4. И 7^{7^7} будет оканчиваться на 3. ☐

○ `Ученик не знает, что делать в пункте а).`

● *Предложить посчитать сначала последнюю цифру числа, стоящего в скобках.*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте б).`

● *На какую цифру заканчивается число 7^n? А как часто последние цифры повторяются? А какой остаток будет у 7^7 при делении на 4?*

Листок 6. Календарь

В начале занятия у доски следует обсудить: а) как определять количество дней в месяце (по кулачкам: выпадает на костяшку — 31 день, между ними — 30, февраль — 28 или 29 в високосном году); б) сколько вообще дней в году, какие именно годы — високосные (те, которые делятся на 4, но не делятся на 100, или те, которые делятся на 400).

$\boxed{1}$ Какое максимальное количество понедельников может быть **а)** в одном месяце; **б)** в одном году?

Ответ. **а) 5; б) 53.**

Решение. **а)** В месяце может быть 5 понедельников, например, если январь начинается с понедельника. Больше быть уже не может, так как для этого в месяце должно быть хотя бы 5 полных недель и еще один день(шестой понедельник), то есть $7 \times 5 + 1 = 36$, а их не бывает больше 31. **б)** аналогично, $365 = 7 \times 52 + 1$, $366 = 7 \times 52 + 2$, то есть целых недель в году 52, а понедельников может быть не больше 53(но и не меньше 52, так как есть 52 целые недели). $\square$

$\boxed{2}$ В 2014 году было 53 среды. Каким днем могло быть 20 февраля?

Ответ. **Вторник.**

Решение. Так как 2014 год не был високосным, 1 января должно было выпадать на среду, иначе их было бы всего 52. Но тогда 29 января также было средой, 31 — пятницей, 1 февраля — субботой, а 20 — четвергом. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Как может получится, что в году 53 среды? С какого дня может начинаться такой год? А что тогда будет 20 февраля?*

$\boxed{3}$ В марте некоторого года было 4 воскресенья и 4 четверга. Каким днем недели могло быть 20 марта?

Ответ. **Субботой.**

Решение. В марте 31 день. Чтобы в нем было 4 воскресенья, он не должен начинаться с воскресенья, субботы и пятницы. Чтобы было 4 четверга — не с четверга, среды и вторника. Значит, он мога начинаться только с понедельника, тогда 20 марта должно быть субботой. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько дней в марте? С чего он может начинаться, чтобы в нем было только 4 понедельника? А чтобы было 4 воскресенья?*

$\boxed{4}$ Бабушка Варя рассказывала, что в 2016 ей исполнилось 17 лет. **а)** Когда она родилась? **б)** Сколько на самом деле сейчас лет бабушке Варе?

Ответ. **а) 29 февраля 1948 года, б)69.**

Решение. **б)** В 2016 ей исполнилось 17, сейчас 2017 значит, ей $17 \times 4 + 1 = 69$ лет, а родилась она в $2017 - 69 = 1948$ году. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какой день бывает не каждый год? В каком году могла родиться бабушка Варя, чтобы ее день рождения мог выпасть именно на этот день?*

$\boxed{5}$ Тёма сказал Коле: «Позавчера мне ещё было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13!» Могли такой разговор состояться в какой-либо день какого-либо года?

Ответ. **Да, 1 января.**

Решение. Если у Темы день рождения 31 декабря, такая фраза 1 января могла быть правдой. $\square$

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Разобраться в том, что такое могло быть, если позавчера был другой год. Какой тогда сегодня может быть день? Когда должен быть день рождения у Темы?*

$\boxed{6}$ Как-то раз Вовочка сказал: «В прошлом месяце воскресений было больше, чем любых других дней недели». В каком месяце это могло произойти?

Ответ. **В марте(високосного года).**

Решение. Если воскресений было больше, чем всех остальных дней недели, то остальных должно было быть по 4, а воскресений — 5. Но тогда в месяце всего 29 дней, значит, это должен был быть февраль, причем, обязательно високосного года. Так как Вовочка говорит про предыдущий месяц, а не про текущий, сейчас должен быть март. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько вообще может быть воскресений в месяце? А всех остальных дней? Скольлько тогда должно было быть дней в предыдущем месяце?*

$\boxed{7}$ «Кубиковый календарь» состоит из двух кубиков, на каждой из граней которых написано по одной цифре. При этом поставив рядом два кубика, можно получить любое число месяца. Какие цифры написаны на гранях?

Решение. Заметим, что цифры 0, 1, 2 должны стоятьв паре со всеми остальными цифрами. Также заметим, что 6 и 9 можно обозначать одной и той же стороной кубика, потому что они никогда не встречаются одновременно и получаются друг из друга путем переворачивания. Тогда расположим на каждом кубике цифры 0, 1 и 2. На оставшихся гранях первого напишем 3, 4 и 5, второго — 6, 7 и 8. Легко убедиться, что такой вариант подходит. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробовать явно выписать те числа, которые мы должны уметь составлять. Сколько всего цифр нам потребуется? Какие цифры встречаются чаще других?*

$\boxed{8}$ Какой день недели будет **а)** через 100 дней; **б)** через 100 лет? **в)** 13 октября 2027?

Ответ. **а) текущий день недели плюс два; б) текущий день недели плюс 5; в) среда.**

Решение. **а)** $100 = 14 \times 7 + 2$, то есть через 98 дней будет тот же день недели, что и сегодня, остается прибавить еще два. **б)** $365 = 52 \times 7 + 1$, значит, за один невисокосный год день недели сдвигается на 1 вперед, за високосный — на два. Из ближайших 100 лет високосных будет 24, так как 2100 год високосным не будет, а невисокосных — 76. Поэтому день недели сдвинется на $76 + 24 \times 2 = 124 = 17 \times 7 + 5$, то есть день недели будет тот же, что и сейчас, плюс 5. **в)** Сначала посчитаем, какой день будет ровно через 10 лет. Это будет текущий день плюс 5. А затем посчитаем, каким днем будет 13 октября 2017. Получим среду. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуй понять, какой будет день недели ровно через год. А что изменилось бы,если бы этот или следующий год был високосным?*

$\boxed{9}$ Оля записала дату своего рождения (в формате дд.мм.гггг), сложила все цифры этой записи и получила 48. Когда Оля родилась?

Ответ. **29 сентября 1999.**

Решение. Максимальная возможная сумма цифр дня — $11 = 2 + 9$, месяца — $9 = 0 + 9$, года — $28 = 1 + 9 + 9 + 9$. Причем, эти суммы достигаются только на приведенных числах. Получаем как раз $48 = 11 + 9 + 28$, значит, ни в какой другой день Оля родиться не могла. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какой может быть сумма цифр дня? А месяца и года? А какие суммы нам подходят, чтобы вместе получилось 48?*

$\boxed{10}$ Когда в следующий раз пригодится календарь на **а)** 2017; **б)** 2016 год?

Ответ. **а) 2023; б) 2044.**

Решение. 1 января 2016 была пятница, 2017 — воскресенье, 2018 — понедельник, 2019 — вт, 2020 — ср, 2021 — пт, 2022 — сб, 2023 — вс, и так далее. После обычного года дни недели сдвигаются на 1, после високосного — на 2. Ближайший год, начинающийся с воскресенья — 2023, он нам подходит; а вот с пяницы — 2021, но он не високосный, а календарь с 2016 — на високосный год, поэтому придется ждать аж до 2044 года. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *С какого дня начинался этот года? А соседние? А с какого тогда начнется следующий? А на сколько дней недели должно сдвинуться начало года, чтобы нам снова подошел календарь?*

Листок 7. Признаки делимости на 3 и 9

Признаки делимости на 3 и 9: *целое число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).*

В начале занятия сформулируйте/напомните признаки делимости на 3 и 9. Расскажите «доказательство» на каком-нибудь примере. Обратите внимание школьников, что на самом деле доказано больше: сумма цифр числа даёт такие же остатки при делении на 3 и 9, как само число. Можно разобрать примеры: а) проверить, делится ли какое-нибудь большое число на 3 или на 9; б) написать большое число с пропущенной цифрой и попросить её вставить так, чтобы полученное число делилось на 3 (это всегда можно сделать тремя или четырьмя способами). Для сильных школьников можно разобрать полные доказательства данных признаков.

$\boxed{1}$ Известно, что число 65349_0712 делится а) на 9; б) на 3. Какая цифра может стоять на месте пропуска? Укажите все возможные варианты!

Ответ. **а)** 8**; б)** $2, 5, 8$**.**

Решение. Сумма известных цифр числа равна 37. а) Чтобы число делилось на 9, на месте "_"должна стоять цифра 8. б) Чтобы число делилось на 3, на месте звездочки должна стоять одна из цифр $2, 5, 8$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Вспомните признаки делимости на 3 и на 9. Примените их.*

$\boxed{2}$ Запишем подряд цифры от 1 до 9, получим число 123456789. Простое оно или составное (то есть делится ли оно нацело на что-нибудь, кроме единицы и самого себя)? Изменится ли ответ в задаче, если каким-то образом поменять порядок цифр в этом числе?

Ответ. **Составное, делится на 9; Не изменится.**

Решение. Сумма цифр этого числа равна 45, поэтому число делится на 9 и остается составным при любой перестановке цифр. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте проверить делимость данного число на 3 или на 9. Меняется ли свойство делимости на эти числа при перестановке цифр числа?*

$\boxed{3}$ Делится ли число 32561698 на 12? Решите эту задачу: **а)** с помощью признака делимости на 4; **б)** с помощью признака делимости на 3.

Ответ. **Не делится.**

Решение. Число не делится на 12, так как оно: **а)** не делится на 4; **б)** не делится на 3. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Вспомните признак делимости на 4 и 3 и примените их. Если у учащегося совсем ступор, можно сесть рядом и подталкивать его мысли к каждому шагу решения.*

$\boxed{4}$ **а)** Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и т. д. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на 3, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника? **б)** Тот же вопрос, но с делимостью на 9.

Ответ. **Всегда выигрывает Таня.**

Решение. Какой бы ни была сумма цифр числа после хода Даши, Таня может своим ходом сделать её кратной 3 или 9. Причем она может делать это как при каждом своем ходе, так и только последним ходом. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Кто делает последний ход? Что этот игрок может сделать этим ходом?*

$\boxed{\textbf{5}}$ В стране Цифра есть 9 городов с названиями $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Ответ. **Нельзя.**

Решение. Города $3, 6, 9$ соединены друг с другом и не соединены ни с какими другими городами. Поэтому добраться из города 1 в город 9 невозможно. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Посмотрите, с какими городами соединён город* 9*. А город* 6*?*

$\boxed{\textbf{6}}$ У числа 100500! вычислили сумму цифр. Затем у полученной суммы снова вычислили сумму цифр, потом ещё раз, и так до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое это число?

Ответ. **9.**

Решение. Исходное число делится на 9. Поэтому сумма цифр на каждом шаге тоже будет делиться на 9. Значит, однозначное число может быть или 0, или 9, но 0 — это сумма цифр только самого нуля. Поэтому в конце получится 9. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте применить признак делимости на* 9*. Делится ли исходное число на* 9*? А сумма его цифр? А сумма суммы цифр?*

$\boxed{\textbf{7}}$ Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число, состоящее из двоек и троек. Сейф откроется, если двоек в коде больше, чем троек, а сам код делится и на 3, и на 4. Какой код может открывать сейф?

Ответ. **2222232.**

Решение. В силу признака делимости на 4 последние две цифры кода могут быть только 32. Если в коде четыре двойки и три тройки, то сумма цифр равна 17, и код не делится на 3. По той же причине код не может состоять из пяти двоек и двух троек (тогда сумма цифр равна 16). Значит, код может состоять только из одной тройки и шести двоек (тогда сумма цифр равна 15 и код делится на 3). Место единственной тройки мы уже определили. Значит, подходит только код 2222232. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какие должны быть две последние цифры числа, если вспомнить признак делимости на* 4*? А дальше попробуйте перебрать количество двоек и троек в числе.*

$\boxed{\textbf{8}}$ В каждом пункте укажите все возможные варианты ответа.

а) Число $2\star45$ делится на 9. Какую цифру заменили звёздочкой?

б) Число $29\star45\star$ делится на 18. Какие цифры заменили звёздочками?

в) Число $72\star4\star$ делится на 45. Какие цифры заменили звёздочками?

г) Число $1\star456\star$ делится на 36. Какие цифры заменили звёздочками?

Ответ. **а) 7; б) 5 и 2, 3 и 4, 1 и 6, 8 и 8; в) 5 и 0, 0 и 5, 9 и 5; г) 2 и 0, 7 и 4, 3 и 8.**

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте перебрать, используя признаки делимости.*

$\boxed{\textbf{9}}$ **а)** Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704? **б)** Может ли натуральное число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть квадратом некоторого другого натурального числа?

Ответ. **Нет в обоих пунктах.**

Решение. **а)** Произведение числа и его суммы цифр либо не делится на 3, либо делится на 9. А 4704 делится на 3, но не на 9. **б)** Такое число делится на 3, но не на 9, а квадрат либо не делится на 3, либо делится сразу на 9. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Может ли произведение числа и суммы его цирф делиться на* 3*, но не делиться на* 9*?*

$\boxed{\textbf{10}}$ **а)** Верно ли, что если натуральное число делится на 27, то и его сумма цифр делится на 27? **б)** Докажите, что любое целое число, которое втрое больше суммы своих цифр, делится на 27.

Ответ. **а) Нет.**

Решение. **а)** Контрпример — само число 27. **б)** Такое число делится на 3, значит, и его сумма цифр делится на 3. Но если оно ещё втрое больше этой суммы цифр, то оно делится на 9. Тогда и его сумма цифр делится на 9. А само число ещё втрое больше суммы цифр, а значит, делится на 27. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● **а)** *Попробуйте придумать простой контрпример.* **б)** *Делится ли такое число на* 3*? А сумма его цифр? А если оно втрое больше суммы цифр, то на что оно ещё должно делиться? А дальше?*

$\boxed{\textbf{11}}$ Натуральное число обладает следующим свойством: для любого числа A, которое делится на , на также делятся и все числа, полученные из перестановкой цифр. Докажите, что может быть равно только 1, 3 или 9.

Решение. Пусть число B — k-значное. Тогда среди чисел от 10^{k+1} до $10^{k+1}+B$ ровно одно делится на B. Это число имеет вид $\overline{10m_km_{k-1}\ldots m_1}$ (это цифры). Раз делимость на B не зависит от порядка цифр, то на B делятся также числа $\overline{m_km_{k-1}\ldots m_110}$ и $\overline{m_km_{k-1}\ldots m_101}$. Значит, их разность, равная 9, делится на B. Тогда $B=1, B=3$ или $B=9$.
(От детей не нужно требовать настолько формальной записи решения.) ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

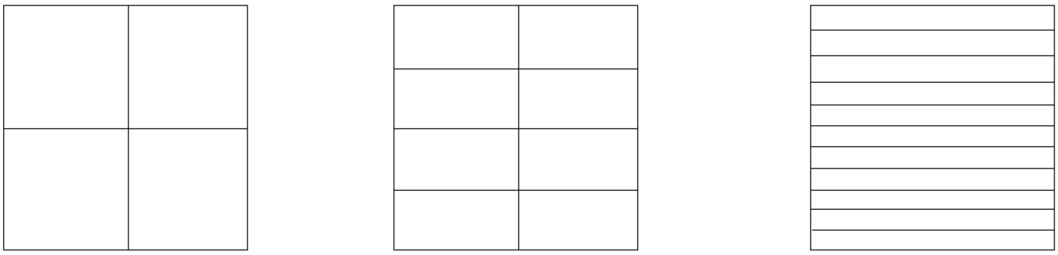
● *Второе предложение из решения учащимся лучше подсказывать.*

Листок 8. Разрежьте квадрат

По этой теме ничего особенного рассказывать не требуется.

1 Разрежьте квадрат на: **а)** 4; **б)** 8; **в)** 11 равных по форме и по площади частей.

Ответ. **см. рис.**



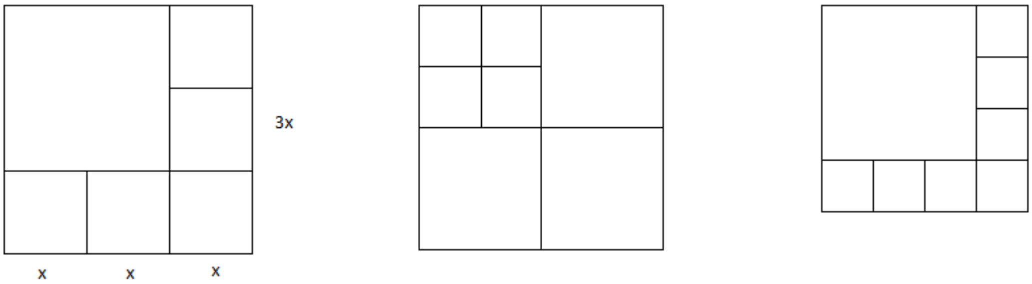
а) б) в)

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Необязательно разрезать на квадраты.*

2 Разрежьте квадрат на: **а)** 6; **б)** 7; **в)** 8 квадратов.

Ответ. **см. рис.**



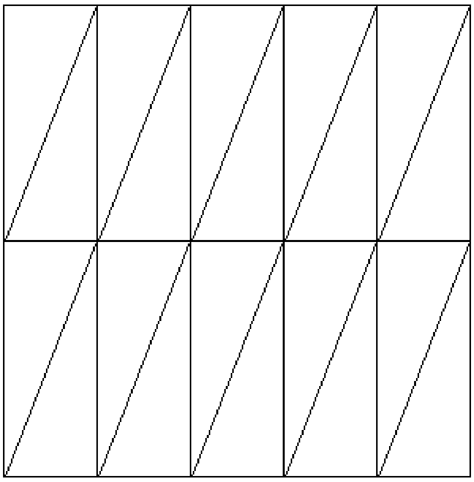
а) б) в)

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Как разрезать квадрат на 9 квадратов? А на 16? А можно ли теперь в этих разрезаниях сделать так, чтобы квадратов стало меньше?*

3 Разрежьте квадрат на 20 одинаковых треугольников.

Ответ. **см. рис.**

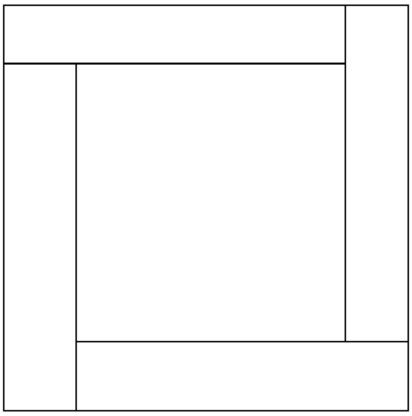


○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте разрезать на* 10 *прямоугольников. А как прямоугольник разрезать на* 2 *треугольника?*

$\boxed{4}$ Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы никакие два прямоугольника не имели целой общей стороны.

Ответ. **см. рис.**

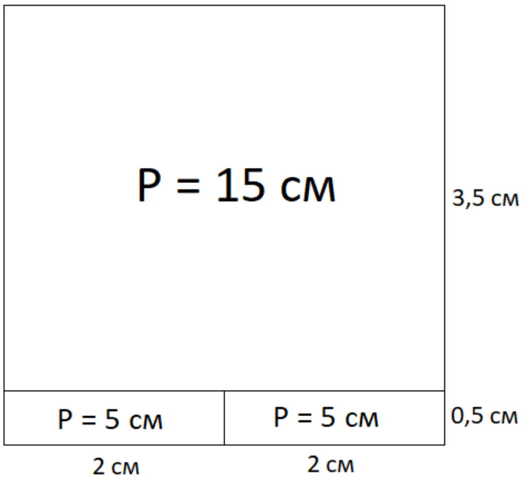


○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Можно подтолкнуть учащегося к решению, показав один-два прямоугольника.*

$\boxed{5}$ Разрежьте квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см.

Ответ. **см. рис.**

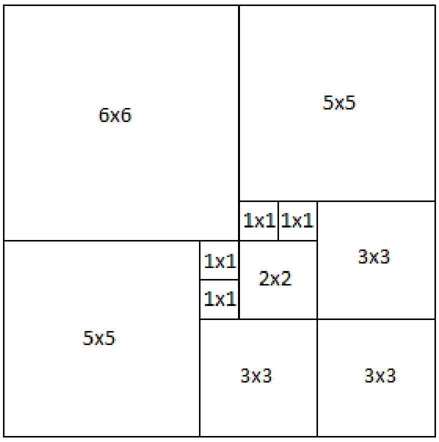


○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Подскажите, что сумма периметров частей равна периметру квадрата плюс удвоенная длина разрезов.*

$\boxed{6}$ Разрежьте квадрат 11×11 по сторонам клеток на 11 квадратов.

Ответ. **см. рис.**



○ Ученик не знает, что делать.

● *Можно помочь учащемуся, нарисовав часть правильных разрезов.*

7 Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно равных), большее пяти.

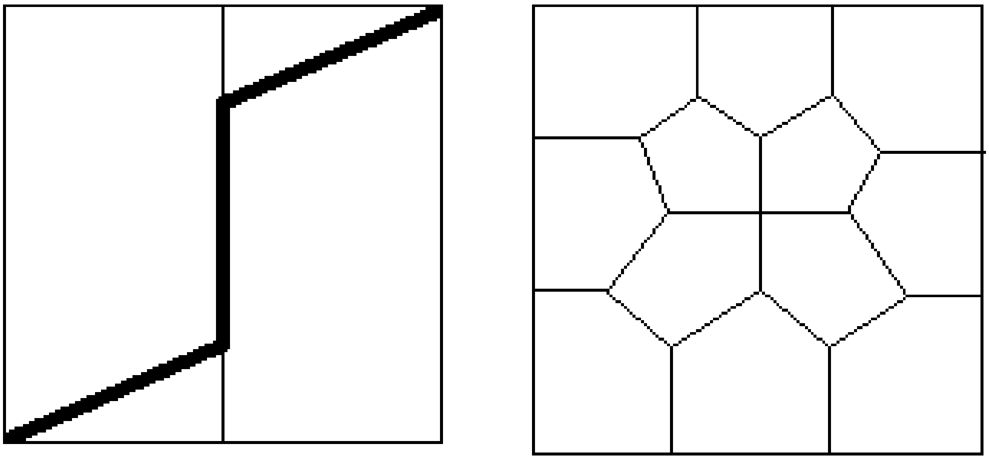
Решение. Для 6, 7 и 8 частей это сделано в задаче 2. На рисунке ниже показано, как разрезать любой квадрат на 4 квадрата; за счёт этой операции всегда можно увеличивать число квадратов на 3 (и вообще на любоей число, кратное 3). □

○ Ученик не знает, что делать.

● *Для какого числа частей мы уже умеем это делать? А как теперь увеличить это число?*

8 Разрежьте квадрат: **а)** на два равных пятиугольника; **б)** на несколько выпуклых пятиугольников.

Ответ. **см. рис.**



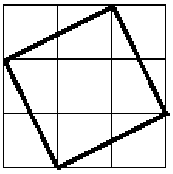
а) б)

○ Ученик не знает, что делать.

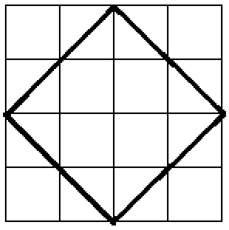
● **а)** *Попробуйте мысленно разрезать квадрат пополам параллельно какой-либо стороне. А теперь дополните части до пятиугольников.* **б)** *Попробуйте резать симметрично. Если не* *получается, можно подсказать часть правильных разрезов.*

$\boxed{\mathbf{9}}$ Изобразите на клетчатой бумаге квадрат с вершинами в узлах сетки площадью: **а)** 5; **б)** 8; **в)** 10; **г)** 13 клеток.

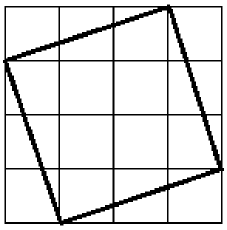
Ответ. **см. рис.**



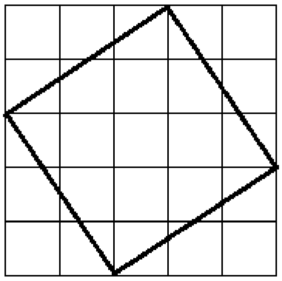
а)



б)



в)



г)

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Необязательно резать по линиям сетки.*

Листок 9. Двигайся и работай!

В начале занятия полезно напомнить определение скорости (при равномерном движении) как отношения пройденного пути ко времени его прохождения, и вытекающие из него формулы для выражения пути через скорость и время и времени через путь и скорость. Можно повторить основные единицы измерение скорости, времени и расстояния и способы перевода этих единиц друг в друга. Также нужно обсудить, что если два объекта движутся навстречу друг другу, то их скорость сближения (то есть скорость, с которой сокращается расстояние между ними) равна сумме их скоростей.

Затем имеет смысл провести параллель между задачами на движение и задачами на работу. В последнем случае путь превращается в объём выполненной работы, а скорость — в производительность. Роль «скорости сближения» в задачах на работу играет производительность совместной работы, которая равна сумме производительностей всех работающих одновременно работников или механизмов.

$\boxed{1}$ Из дома Юра вышел на 5 минут позже Лены, но шёл со скоростью в два раза большей, чем она. Через какое время Юра догонит Лену?
Ответ. 5 **минут.**

Решение. За 5 минут Юра пройдёт то же расстояние, что Лена за 10 минут. Поэтому через пять минут после выхода Юры он догонит Лену. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте посмотреть на скорости Юры и Лены.*

$\boxed{2}$ Собаки Жучка и Полкан увидели друг друга во дворе и одновременно побежали навстречу друг другу. Через 5 с, когда между ними оставалось 6 м, Жучка испугалась и встала как вкопанная, а Полкан ещё через 2 с подбежал к ней и поприветствовал. На каком расстоянии находились собаки, когда увидели друг друга, если Полкан бегает втрое быстрее Жучки?
Ответ. 26 **метров.**

Решение. Вычислим скорость Полкана: 6м/2с = 3м/с. Вычислим скорость Жучки: 3м/с/3 = 1м/с. Тогда скорость сближения будет: $3 + 1 =$ 4м/с. Вместе они пробежали: 4м/с $\cdot$ 5с = 20м. Тогда всё расстояние будет: 20м + 6м = 26м. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Вычислите скорости собак и скорость сближения.*

$\boxed{3}$ Белка за 20 минут приносит в гнездо орех. Далеко ли от орешника её гнездо, если налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом — со скоростью 3 м/с?
Ответ. 2250 **метров.**

Решение. Пусть расстояние от орешника до гнезда метров, тогда от гнезда к орешнику белка бежит /5 секунд, а от орешника к гнезду /3 секунды. В 20 минутах 1200 секунд. По условию задачи составляем уравнение: $/5 + /3 = 1200$. Его решением будет $x = 2250$ метров. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Составьте уравнение, приняв за неизвестное расстояние от орешника до гнезда.*

$\boxed{4}$ Бенедикт и Франциск красят забор. Каждый из них по отдельности может покрасить забор за 8 часов. Забор начал красить Бенедикт, а спустя 2 часа к нему присоединился Франциск. За сколько часов был покрашен весь забор?
Ответ. **За** 5 **часов.**

Решение. Если за восемь часов Бенедикт красит весь забор, то за два часа он покрасит четверть забора, и останется покрасить ещё три четверти забора. Работая вдвоём, Бенедикт и Франциск покрасили бы весь забор за 4 часа. Тогда четверть забора они бы покрасили за час, а три четверти забора — за три часа. Итого на покраску забора уйдёт $2 + 3 = 5$ часов. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Посмотрите, какую часть забора каждый красит за час.*

$\boxed{5}$ На птицеферме «Курочка Ряба» 8 т корма курам хватает на 20 дней. На птицеферме «Серая Шейка» такого же запаса уткам хватает на 60 дней. На сколько дней хватит 8 т этого корма всем птицам вместе, если птицефермы объединятся?

Ответ. **На 15 дней.**

Решение. За 60 дней утки с птицефермы «Серая Шейка» съедят восемь тонн корма, а куры с птицефермы «Курочка Ряба» за это же время съедят уже $8 \cdot 3 = 24$ тонны корма. Поэтому птицы с обеих птицеферм вместе за 60 дней съедят 32 тонны корма. Значит, 8 тонн корма они съедят вчетверо быстрее, то есть за 15 дней. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Посмотрите, сколько тонн корма тратят фермы вместе за день.*

$\boxed{6}$ Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Мальчик умеет бегать вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно 1 км. Есть ли смысл идти до следующей остановки, или есть риск упустить автобус?

Ответ. **Имеет смысл идти.**

Решение. Пусть мальчик пошел к следующей остановке и в какой-то момент заметил автобус. Скорость автобуса в четыре раза больше скорости мальчика, поэтому за одно и то же время автобус проезжает расстояние в четыре раза большее. В случае, если они двигаются навстречу друг другу, до встречи с автобусом мальчик пробежит пятую часть от 2 км, то есть $2/5$ км. Это означает, что отойдя от остановки не более, чем на $2/5$ км, мальчик сможет успеть на автобус, побежав назад. В случае, если автобус догоняет мальчика, мальчик успеет пробежать треть от 2 км (а автобус $4/3$), то есть $2/3$ км до момента, когда автобус его догонит. Это означает, что он сможет успеть на автобус, если до следующей остановки осталось не более $2/3$ км. Так как $2/3 + 2/5 > 1$, то у мальчика всегда будет возможность успеть на автобус, и имеет смысл идти. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Рассмотрите случаи, когда мальчик побежит обратно (т.е. навстречу автобусу) и на следующую остановку (т.е. от автобуса), вычислите максимальное расстояние в обоих случаях, чтобы мальчик успел.*

$\boxed{7}$ Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?

Ответ. 5 **минут.**

Решение. Заменим время в секундах временем в минутах: 6 минут 40 секунд заменим на $6\frac{2}{3}$, или $20/3$, а 13 минут 20 секунд — на $40/3$. За одну минуту холодной водой заполнится $3/20$ ванны, горячей — $1/8$ ванны, а вытечет $3/40$ ванны. Следовательно, за одну минуту наполнится $3/20 + 1/8 - 3/40 = 1/5$ ванны. Значит, вся ванна наполнится за 5 минут. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Для удобства замените всё время на минуты. Посмотрите, какая часть ванны за минуту наполняется холодной водой, горячей водой, а также сколько за минуту выливается воды.*

$\boxed{8}$ Артели косцов надо было скосить два луга, один из которых вдвое больше другого. Полдня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам: первая половина осталась на лугу и докосила его к вечеру, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался участок, скошенный за целый следующий день одним косцом. Сколько косцов в артели?

Ответ. 8 **косцов.**

Решение. Обозначим за x часть большого луга, которую половина артели скосила за полдня. Тогда целая артель за полдня скосила $2x$, а всего за первый день на большом лугу было скошено $3x$. Принимая весь большой луг за единицу, получим уравнение $3x = 1$, откуда $x = 1/3$. То есть за полдня половина артели скосит треть большого луга. Поскольку маленький луг вдвое меньше большого, другая половина артели за те же полдня скосит столько же, то есть две трети маленького луга. Наконец, последнее условие задачи даёт, что оставшуюся треть маленького луга один косец скосил за день. Половина артели скосила вдвое больше за вдвое меньшее время, значит, в половине артели $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ человека, а во всей артели 8 человек. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Возъмите за неизвестное часть большого луга, которую половина артели скосила за полдня. Отталкиваясь от этой "величины вычислите все остальные величины (возъмите большой луг за "единицу").*

$\boxed{9}$ Два пловца одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый — по течению, второй — против течения. Через пять минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто из них вернулся раньше? Скорости пловцов в стоячей воде не обязательно равны.

Ответ. **Пловцы вернулись одновременно.**

Решение. Относительно плота каждый пловец всегда плывет со своей собственной скоростью (независимо от того, по или против течения он плывет). По условию каждый пловец плыл 5 минут, удаляясь от плота. Значит, ему потребуется ещё 5 минут, чтобы возвратиться обратно. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *С точки зрения человека, находящегося на плоту, каждый пловец всегда плывет со своей собственной скоростью.*

$\boxed{10}$ Однажды улитка заползла на вершину бамбука, который растёт так, что каждая его точка поднимается вверх с одной и той же скоростью. Путь вверх занял у улитки 7 часов. Отдохнув на вершине бамбука ровно час, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука (обе скорости постоянны)?

Ответ. **В** 9 **раз.**

Решение. Всего улитка провела на бамбуке $7+1+8 = 16$ часов. Пусть, поднимаясь вверх, улитка проползла расстояние равное x, а за 1 час отдыха и 8 часов спуска улитки бамбук подрос на y. Тогда, спускаясь вниз, улитка проползла $x+y$. Составим выражения для определения скорости улитки при движении вверх по бамбуку $x/7$ и при спуске $(x+y)/8$. Получим, что $x/7 = (x+y)/8$, т.е. $8x = 7x + 7y$, или $x = 7y$. Так как бамбук подрос на y за 9 часов, скорость его роста равна $y/9$. Выполняя деление последнего равенства на 7, получим, что $x/7 = 7y/7$, откуда $x/7 = 9 \cdot y/9$. Значит, скорость роста бамбука в 9 раз меньше скорости улитки. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько часов провела улитка на бамбуке? Возъмите за неизвестное x расстояние, что улитка проползла вверх, а за неизвестное y — длину, на которую подрос бамбук за 1 час и 8 часов спуска. Какое тогда расстояние проползла улитка, спускаясь вниз? Составьте выражение для определения скорости улитки при движении вверх по бамбуку и при спуске.*

Листок 10. Рыцари, лжецы и телепаты

- На острове живут аборигены двух племён: рыцари и лжецы.
- Среди представителей обоих племён встречаются телепаты, которые воздействуют на своих соседей.
- Если на рыцаря, не являющегося телепатом, воздействует телепат-лжец (и его действие не нейтрализовано действием соседа телепата-рыцаря с другой стороны), то рыцарь лжёт. В остальных случаях рыцарь говорит правду.
- Если на лжеца, не являющегося телепатом, воздействует телепат-рыцарь (и его действие не нейтрализовано действием соседа телепата-лжеца), то лжец говорит правду. В остальных случаях лжец лжёт.
- Телепаты нейтрализуют воздействие на себя соседей-телепатов.
- Если телепат-рыцарь и телепат-лжец воздействуют с двух сторон одновременно на аборигена, не являющегося телепатом, то их действия нейтрализуются.

Это занятие — с задачами про рыцарей и лжецов, но не совсем такими, как вы привыкли. Здесь есть ещё и телепаты, которые воздействуют на своих соседей. Идея подобных задач принадлежит, по-видимому, Р. Г. Женодарову. В начале занятия нужно прочитать и разобрать вместе со школьниками «инструкцию» выше. Стоит договориться об обозначениях. Например, Р — рыцарь-не-телепат, р — рыцарь-телепат, Л — лжец-не-телепат, л — лжец-телепат. Вот несколько возможных ситуаций для примера:

- Р л — в такой ситуации оба будут лгать;
- р Л — в такой ситуации оба будут говорить правду;
- р л — здесь оба телепаты, они друг на друга не действуют;
- р Р л — действия двух телепатов из разных племён на рыцаря в середине нейтрализуются, и этот рыцарь по-прежнему говорит правду.
- Здесь на рыцаря, стоящего в центре, действуют сразу четыре телепата. Поскольку среди этих телепатов больше лжецов, чем рыцарей, то рыцарь в центре будет лгать. Расположение:

  . р .
  л Р л
  . л .

Обратите внимание (своё и учащихся): под действием телепатов аборигены не меняют свою принадлежность к тому или иному племени, а только временно говорят не так, как свойственно представителям их племени!

$\boxed{1}$ Может ли абориген произнести фразу: **а)** «Я лжец»; **б)** «Я лгу»?

Ответ. **а) Да; б) Нет.**

Решение. **а)** Фраза «Я лжец» может быть произнесена лжецом под действием рыцаря-телепата: он будет вынужден сказать правду (ведь он по-прежнему принадлежит к племени лжецов, хоть сейчас и говорит правду в силу обстоятельств). То же самое — для рыцаря-не-телепата под действием лжеца-телепата. **б)** А вот фраза «Я лгу» не может быть сказана никем ни при каких обстоятельствах — она характеризует то, что говорится в данный момент, а не принадлежность говорящего к одному из племён. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● **а)** *Если ученик думает, что не может, то можно согласиться, что в случае отсутствия телепатов это верно, ну а если есть телепаты, то что?* **б)** *Можно натолкнуть учащегося на мысль, что данная фраза характеризует то, что говорится в данный момент, а не принадлежность говорящего к одному из племён.*

$\boxed{\textbf{2}}$ Шесть аборигенов встали в круг. Трое заявили, что в круге чётное число рыцарей, а остальные трое заявили, что в круге нечётное число лжецов. Какое наибольшее число рыцарей может стоять в круге?

Ответ. 5 **рыцарей.**

Решение. Ясно, что одна половина утверждений верна, а другая — нет, поскольку суммарное количество рыцарей и лжецов должно быть чётным. Значит, лжецы в круге есть. При этом достаточно одного лжеца-телепата: при расстановке лРРРРР три рыцаря скажут правду про нечётное число лжецов, а л и два рыцаря рядом с ним солгут про чётное число рыцарей. Поэтому в круге стоит максимум 5 рыцарей. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Есть ли лжецы в круге? Какое должно быть суммарное количество лжецов и рыцарей? А если лжецы есть, достаточно ли будет одного лжеца?*

$\boxed{\textbf{3}}$ 10 аборигенов встали в ряд. Каждый сказал: «Я телепат». Сколько телепатов могло быть среди них? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 0 **телепатов или** 10 **телепатов.**

Решение. Заметим, что назваться телепатом может только: 1) Л без влияния р; 2) р; 3) Р под влиянием л. Последний случай невозможен, так как л, если бы он там был, сам бы не назвался телепатом. Отсюда следует, что возможны только два очевидных предельных случая: ЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ (0 телепатов) и рррррррррр (10 телепатов). ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Кто и в каком случае может назваться телепатом? Перечислите все варианты. Что отсюда следует?*

$\boxed{\textbf{4}}$ В круг встали несколько аборигенов (больше одного). Сначала все сказали: «Среди моих соседей есть лжец». Следом все сказали: «Среди моих соседей есть рыцарь». И, наконец, все сказали: «Среди моих соседей есть телепат». Сколько аборигенов могло быть в круге? Укажите все варианты.

Ответ. **Любое число, кратное четырём.**

Решение. Все говорящие должны говорить правду (иначе среди их соседей не будет ни рыцарей, ни лжецов). Значит, у каждого среди соседей есть рыцарь, лжец и телепат. Чтобы выполнялись первые два условия, аборигены должны чередоваться по два: РРЛЛРРЛЛ... При этом все рыцари должны быть телепатами, а лжецы — нет (чтобы лжецы под влиянием рыцарей говорили правду). Таким образом, количество аборигенов в круге может быть любым, кратным четырём (в противном случае круг не замкнётся). ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Может ли кто-то из говорящих лгать? Что отсюда следует?*

$\boxed{\textbf{5}}$ Кандидатами в президенты острова были выдвинуты 4 аборигена: два рыцаря, один из которых обладает телепатическими способностями, а другой — нет, и два лжеца, один из которых обладает телепатическими способностями, а другой — нет. После выборов они выстроились в ряд, и каждый сказал: «Я или мой сосед — президент». Затем первый сказал: «Мой сосед — лжец», второй сказал: «Оба моих соседа — рыцари», третий сказал: «Оба моих соседа — лжецы», а четвёртый сказал: «Мой сосед — лжец». Определите, кто стал президентом и где он стоит.

Ответ. **Президентом стал второй, он лжец-не-телепат.**

Решение. Пусть второй говорит правду. Тогда он Л (и не телепат, иначе он бы лгал), первый и третий — Р (один из них телепат), четвёртый — л. Так как третий говорит правду, находясь под влиянием четвёртого, он должен быть р. В этом случае первые трое говорят правду, значит, президент — второй, и он Л (не телепат).
Пусть теперь второй лжёт. Тогда президентом может быть только четвёртый, и значит, он и третий говорят правду. Тогда лжецами должны быть второй, третий и четвёртый, чего быть не может. Значит, такая ситуация невозможна. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте рассмотреть случаи, когда второй говорит правду, и когда неправду.*

$\boxed{6}$ В каждой клетке доски 4×4 стоит абориген. Какое наибольшее число из них может произнести фразу «Я лжец»? **а)** Соседями считаются соседи по стороне и по диагонали, то есть если клетки имеют хотя бы одну общую точку. **б)** Соседями считаются соседи только по стороне.
Ответ. **а) 12; б) 12.**

Решение. Из задачи №1 следует, что для максимального количества ответов «Я лжец» все не телепаты (а только они могут такое сказать) должны говорить «Я лжец» под влиянием телепатов из другого племени. Эту фразу произнесут все Л, на которых действуют р. **а)** Ставим четырёх р в центральные клетки, а в остальные ставим лжецов. Теперь 12 лжецов говорят «Я лжец». Докажем, что больше таких утверждений получить не удастся. Разделим доску на 4 квадрата 2×2. Тогда в каждом квадрате утверждений «Я лжец» может быть не больше трёх (либо в этом квадрате есть телепат, который так не скажет, либо на угловую клетку не действуют телепаты, и стоящий там тоже так не скажет). Кстати, в этом случае пример на 12 можно построить с помощью трёх и даже двух телепатов. **б)** 12 утверждений «Я лжец» можно получить при такой расстановке, как на рисунке ниже. Докажем, что больше таких утверждений получить не удастся. Пусть их больше. Тогда на доске не более трёх телепатов. Каждый телепат действует максимум на 4 других аборигенов. Значит, всего под действием трёх телепатов максимум 12 других аборигенов скажут «Я лжец». Тогда на 13-го аборигена никто не действует, и он не скажет «Я лжец». □

Л	Л	р	Л
р	Л	Л	Л
Л	Л	Л	р
Л	р	Л	Л

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Попробуйте посмотреть на задачу №1. Кто должен говорить «Я лжец» для максимального количества этих ответов? Если ученик не понимает, можно подсказать, что ответ 12 в обоих пунктах. От учащегося будет требоваться доказать, что больше нельзя.*

$\boxed{7}$ По кругу в некотором порядке стоят пять рыцарей и пять лжецов. Каждый сказал: «Среди моих соседей есть рыцарь». При каком наименьшем числе телепатов среди них это возможно?
Ответ. **Два телепата (рыцаря).**

Решение. Совсем без телепатов обойтись нельзя: обязательно будет лжец, стоящий рядом с рыцарем, и он должен сказать правду под действием р. Более того, лжецов, стоящих рядом с рыцарями, будет минимум два, причём если их ровно два, то на них должны действовать разные телепаты-рыцари (иначе не удастся разместить всех лжецов). Поэтому рыцарей-телепатов должно быть минимум два. Легко построить пример с двумя телепатами: рРРРрЛЛЛЛЛ. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Можно ли обойтись совсем без телепатов? Может ли быть около рыцаря менее двух лжецов?*

Листок 11. Переливания

В задачах на переливания нельзя переливать жидкости «на глазок». К примеру, нельзя быть уверенным, что мы наполнили в точности половину ёмкости. Поэтому, если в ёмкость наливается жидкость, то она наливается до краёв; если мы жидкость выливаем/переливаем, то выливаем всю, без остатка, а переливаем до тех пор, пока не опорожнится первая ёмкость либо не наполнится вторая (если в условии задачи явно не написано иное).

$\boxed{1}$ Имеются два ведра: одно ёмкостью 4 литра, другое — 9 литров. Можно ли набрать из реки ровно 6 литров воды?
Ответ. **Можно.**

Решение. Действуем следующим образом:

- наливаем воду в 9-литровое ведро;
- переливаем в 4-литровое, остается 5 литров, выливаем 4-литровое в реку;
- переливаем в 4-литровое ведро, остается 1 литр в 9-литровом, выливаем 4-литровое в реку;
- переливаем 1 литр в 4-литровое ведро;
- наливаем 9-литровое и опять переливаем в 4-литровое, в котороем есть уже 1 литр. В итоге 3 литра выльется, а в 9-литровом ведре останется $9 - 3 = 6$ литров.

□

○ `Школьник не знает, что делать.`
● *Попробуйте получить* 1 *литр в* 9*-ти литровом ведре.*

$\boxed{2}$ Можно ли отмерить 8 литров воды, находясь у реки и имея два ведра: одно вместимостью 15 литров, другое — вместимостью 16 литров?
Ответ. **Можно.**

Решение. Действуем следующим образом:

- Наливаем воду в 16-литровое ведро и переливаем всё в 15-литровое. Остаётся 1 литр.
- Выливаем всё из 15-литрового и выливаем в него 1 литр, который оставался в 16-литровом.
- Снова набираем 16-литровое ведро и переливаем всё в 15-литровое. Сейчас в 16-литровом осталось уже 2 литра воды (так как в 15-литровом ведре уже был 1 литр воды).
- Выливаем из 15-литрового всё и заливаем туда 2 литра из 16-литрового.
- Повторяем так ещё несколько раз, пока не накопится 8 литров.

□

○ `Школьник не знает, что делать.`
● *Попробуйте получить* 1 *литр в* 15*-литровом. А* 2 *литра?*

$\boxed{3}$ Есть три бидона ёмкостью 14 литров, 9 литров и 5 литров. В самом большом бидоне 14 литров молока, остальные бидоны пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?

Решение. Действуем по следующей схеме (первое число - сколько литров в 14-литровом бидоне, второе - сколько в 9-литровом, третье - сколько в 5-литровом): 14,0,0 – 9,0,5 – 9,5,0 – 4,5,5 – 4,9,1 – 13,0,1 – 13,1,0 – 8,1,5 – 8,6,0 – 3,6,5 – 3,9,2 – 12,0,2 – 12,2,0 – 7,2,5 – 7,7,0. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
● *Получите сначала* 1 *литр, а затем* 2 *литра в* 9*-литровом бидоне.*

$\boxed{4}$ В баке не менее 10 литров бензина (но неизвестно, сколько именно). Можно ли отлить из бака 6 литров бензина с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

Решение. Действуем следующим образом (порядок: бак, 9-литровое ведро, 5-литровый бидон): $\geqslant 10,0,0-\geqslant 5,0,5-\geqslant 5,5,0-\geqslant 0,5,5-\geqslant 0,9,1-\geqslant 9,0,1-\geqslant 9,1,0-\geqslant 4,1,5-\geqslant 4,6,0.$ $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте получить один литр. Это можно сделать в* 5*-литровом бидоне.*

$\boxed{5}$ Таня стоит на берегу реки. У неё есть два глиняных кувшина: один на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды).

Решение. **Первый способ.** Пусть Таня нальёт из полного малого кувшина речную воду в большой, а затем наполнит малый и из него дольёт большой доверху. Далее Тане надо опорожнить большой сосуд и вылить в него остаток из малого. Если малый был на 3 литра, то сейчас в большом 1 литр, иначе — 3 литра. Теперь пусть Таня снова попытается перелить воду из полного малого кувшина в большой. Если это ей удастся, то малый был трёхлитровым, если вода польётся через край, — четырёхлитровым.

Второй способ. Если бы у Тани большой кувшин вмещал 10 литров, то достаточно было бы попытаться налить в него воду из малого трижды. Если вода польётся через край, то малый на 4 литра, если нет, то на 3. С пятилитровым кувшином такая проверка возможна, если Таня опорожнит пятилитровый кувшин, когда тот заполнится. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Если бы у Тани большой кувшин вмещал* 10 *литров, то достаточно было бы попытаться налить в него воду из малого трижды.*

$\boxed{6}$ Имея два полных 10-литровых бидона молока и пустые 4 и 5-литровые кастрюли, отлейте по 2 литра молока в каждую кастрюлю.

Решение. Действуем следующим образом (в первом 10 литров, во втором 10 литров, третий (объемом в 5 литров) — пуст, четвертый (4 литра) — также пуст):
10,10,0,0 → 10,5,5,0 → 10,5,1,4 → 10,9,0,1 → 10,4,5,1 → 10,4,2,4 → 10,8,2,0 → 10,8,0,2 → 10,3,5,2 → 10,3,3,4 → 10,7,3,0 → 6,7,3,4 → 6,7,5,2 → 6,10,2,2. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте получать* 1 *литр в разных бидонах.*

$\boxed{7}$ Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 литра сиропа, в другом — 20 литров воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. Как получить 10 литров разбавленного 30%-го сиропа?

Решение. Обозначим сосуды с сиропом, с водой и пустой соответственно A, B и C. Перельём из B в C 3 литра воды, а затем выльем эти 3 литра в раковину; повторим эту операцию несколько раз, пока в B не останется 5 литров воды, причём в последний раз перельём воду из C не в раковину, а в A. Теперь в A — 6 литров смеси, а C снова пуст. Перельем 5 литров из A в C. Теперь можно перелить 4 литра воды из в , а оставшийся в B литр вылить в раковину. Осталось вернуть 5 литров смеси из C в , где образуется 10 литров смеси: 3 литра сиропа и 7 литра воды, то есть 30-процентный сироп. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

● *Попробуйте отмерить* 5 *литров воды. Слейте* 3 *литра воды в сироп. Какая смесь уже получена?*

$\boxed{8}$ На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

Решение. Разделим стаканы на пары A - A', B - B', C - C', D - D', и уравняем количества воды в каждой паре стаканов. Теперь у нас две совершенно одинаковые четверки: A, B, C, D и A', B', C', D'. Уравняем количество воды в первой четверке, а затем точно таким же способом — во второй четверке. Итак, мы свели нашу задачу к той же самой задаче, но уже для четырех стаканов. Точно также разделим четыре стакана по парам и, уравняв количества воды в этих парах, сведем задачу к случаю двух стаканов. Но в двух стаканов количества воды можно уравнять по условию. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

● 8 — *это степень двойки. Решите эту задачу сначала для четырех стаканов, а затем — для восьми.*

Листок 12. Проценты

В начале занятия нужно напомнить, что такое проценты и разобрать у доски а) как посчитать процент от числа x; б) как увеличить или уменьшить число x на сколько-то процентов; в) что значит, что x — это сколько-то процентов от числа y.

$\boxed{1}$ На что нужно умножить данное число, чтобы оно: **а)** возросло на 27%; **б)** уменьшилось на 78%?

Ответ. **а)** 1,27**; б)** 0,22**.**

$\boxed{2}$ Число **а)** умножили на 0,75; **б)** умножили на 2,34; **в)** разделили на 2,5. На сколько процентов и в какую сторону изменилось число?

Ответ. **а) уменьшилось на 25%; б) увеличилось на 134%; уменьшилось на 60%.**

Решение. **в)** 100% : 2,5 = 40%, то есть от 100% числа осталось 40%, значит, число уменьшилось на 60%. ☐

$\boxed{3}$ 80 тетради разложили в две стопки так, что количество тетрадей в первой стопке составляет 60% от количества тетрадей во второй стопке. Сколько тетрадей в каждой стопке?

Ответ. **В первой стопке 30 тетрадей, во второй — 50.**

Решение. Возьмем количество тетрадей во второй стопке за x. Тогда в первой стопке 60% от x тетрадей, то есть $0{,}6x$, а всего $0{,}6x + x = 1{,}6x = 80$, то есть $x = 50$ — тетрадей во второй стопке и $50 \times 0{,}6 = 30$ — в первой стопке. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Разобрать вместе с ним, как посчитать количество тетрадей во второй стопке, зная количество тетрадей в первой. Можно пмочь составить уравнение.*

$\boxed{4}$ В двух бочках было поровну воды. Количество воды в первой бочке сначала уменьшили на 20%, а затем увеличили на 20%. А количество воды во второй бочке, наоборот, сначала увеличили на 20%, а затем уменьшили на 20%. В какой бочке теперь больше воды?

Ответ. **Воды в бочках все еще поровну.**

Решение. Пусть изначально в бочках было x воды. Тогда в первой стало $x \times 1{,}2 \times 0{,}8$, а во второй — $x \times 0{,}8 \times 1{,}2$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Можно на примерах предыдущих задач обсудить, как записать, что количество уменьшилось или увеличилось на сколько-то процентов.*

$\boxed{5}$ Длина первого прямоугольника больше длины второго на 25%. На сколько процентов должна быть меньше его ширина, чтобы площади прямоугольников были одинаковыми?

Ответ. **На 20%.**

Решение. Обозначим за x и y длину и ширину второго прямоугольника. Тогда длина первого прямоугольника равна $1{,}25x$, а ширина — ky, а равенство площадей можно записать следующим образом: $1{,}25x \times ky = xy$, откуда получаем, что $k = 1 : 1{,}25 = 0{,}8$. А умножить число на 0,8 — это тоже самое, что уменьшить его на 20%, откуда мы получаем ответ. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Предложить написать уравнение, обсудить, как лучше записать условие.*

$\boxed{6}$ Арбуз массой 20 кг на 99% состоял из воды. После того, как он усох, воды в нем осталось 98%. Сколько теперь весит арбуз?

Ответ. **10 кг.**

Решение. Посчитаем, сколько изначально в арбузе было сухого вещества(то есть не воды) в килограммах: $20 \times 0{,}01 = 0{,}2$. После усыхания эти же 0,2кг стали уже двумя процентами от общего веса, то есть общий вес в килограммах можно найти так: $0{,}2 : 0{,}02 = 10$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Предложите ему посчитать, сколько было воды. Затем, сколько было сухого вещества. А сколько процентов занимало сухое вещество? А сколько стало?*

$\boxed{7}$ Из четырех классов "5"за итоговую контрольную по математике получили 28% школьников, "4 "3"и "2— 35%, 25% и 12%. Сколько школьников писали работу, если в каждом классе не больше 30 человек?

Ответ. **100 школьников.**

Решение. Так как оценку могло получить только целое количество школьников, нам нужно, чтобы $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$, $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$, $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ и $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ от общего количества школьников были бы целыми числами. Для этого нужно, чтобы количество школьников делилось на 25, 20 и 4. Наименьшее подходящее число — это 100, следующее — 200, но оно уже не подойдет нам, так как, по условию, в 4 классах не может быть больше 120 человек. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Пусть у нас x школьников. Сколько тогда получили пятерки? А четверки? А сколько должно быть школьников, чтобы это было целым числом?*

○ `Ученик угадал ответ, но не обосновал единственность.`

● *А сколько еще может быть школьников? А почему другие ответы не подойдут?*

$\boxed{8}$ Ребята собирались в поход. Девочек должно было быть 25% от общего количества ребят, но одна заболела, а на ее место взяли мальчика. В результате девочек пошло 20% от общего количества. Сколько пошло в поход мальчиков? А девочек?

Ответ. **16 мальчиков и 4 девочки.**

Решение. Пусть N - это общее количество цчастников похода. Тогда девочек должно было пойти $0{,}25N$, а пошло $0{,}25N - 1 = 0{,}2N$, то есть $0{,}05N = 1$, $N = 20$, тогда мальчиков в поход пошло $20 \times 0{,}8$, а девочек — $20 \times 0{,}2$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Как посчитать, сколько в поход собиралось девочек? А как посчитать, сколько пошло в итоге? А другим способом?*

$\boxed{9}$ Управляющий собирал деньги на установку номеров квартир. Причем, жителю квартиры 105 объяснил, что с их подъезда собирают на 40% больше денег, так как двузначный номер стоит вдвое больше, чем однозначный, а трехзначный — втрое. Сколько квартир в подъездах, если их одинаковое количество в обоих подъездах?

Ответ. **72 квартиры.**

Решение. Для начала заметим, что во втором подъезде есть квартира с номером 105. Отсюда следует, что в первом подъезде есть двузначные номера квартир, но нет четырехзначных. Остается разобрать два случая. Пусть x - это количество квартир в подъезде, а c - стоимость одной цифры номера. *Случай 1.* Пусть первом подъезде нет трехзначных номеров. Тогда получаем уравнение: $1{,}4 \times (9c + 2c(x - 9)) = 2c(99 - x) + 3c(2x - 99)$, c сокращается, получаем единственное решение $x = 72$. *Случай 2.* Пусть в первом подъезде есть и трехзначные номера. Получаем уравнение:$1{,}4 \times (9c + 2c \times 90 + 3c(x - 99)) = 3c$, оно снова имеет единственное решение: $x = 126$, но это противоречит условию, ведь квартира 105 должна находиться во втором подъезде. Остается единственный ответ. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Опишите все возможные случаи. Вместе посчитайте, сколько цифр будет в номерах первого и второго подъезда.*

Листок 13. Можно или нельзя?

В начале занятия стоит объяснить, что именно требуется от ребят в данном листочке. А именно: они должны будут привести пример ситуации, описанной в условии, или доказать, что этот пример построить невозможно. Можно разобрать простую задачку. Например. Можно ли расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга? А 9 ладей? Ответ на первый вопрос — да, пример: ладьи, стоящие на главной диагонали. Ответ на второй вопрос — нет. Так как ладья бьет все клетки строки, на которой стоит, мы не можем поставить больше одной ладьи в каждой строке, а строк всего 8, значит, больше 8 ладей поставить невозможно.

$\boxed{1}$ Существуют ли два последовательных целых числа: **а)** у каждого из которых сумма цифр делится на 4; **б)** у которых одинаковая сумма цифр?

Ответ. **а) да; б) нет.**

Решение. . **а)** Например, 39 и 40. **б)** Известно, что число даёт такой же остаток при делении на 3, что и сумма его цифр(мы помним это из листочка напризнаки делимости). У двух последовательных чисел остатки при делении на 3 разные, значит, и у сумм их цифр тоже разные. Тогда и числа не могут быть равны ☐

○ `Ученик не знает, что делать в пункте а).`

● *Попробовать поперебирать разные числа. Посмотреть, как меняется сумма цифр, если к числу прибавить единицу: когда нет перехода через десяток и когда есть.*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте б).`

● *Сначала нужно угадать ответ. После этого вспомнить признак делимости на 3 или 9. Разобраться, как это можно связать с нашей задачей.*

$\boxed{2}$ Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0.1?

Ответ. **Да, может.**

Решение. Например, условию задачи удовлетворяют одиннадцать чисел, равных $\frac{1}{11}$. Сумма их квадратов равна $11 \cdot (\frac{1}{11})^2 = \frac{1}{11} < 0.1$. Но конечно, есть и другие варианты. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай вспомним, когда квадрат числа меньше, чем само число. И как думаешь, нам можно выбирать для этой задачи одинаковые числа? А теперь давай искать какие-нибудь простые.*

$\boxed{3}$ Можно ли расположить 12 одинаковых монет вдоль стенок большой квадратной коробки так, чтобы вдоль каждой стенки лежало ровно **а)** по 2 монеты; **б)** по 3 монеты; **в)** по 4 монеты; **г)** по 5 монет; **д)** по 6 монет; **е)** по 7 монет? (Разрешается класть монеты одну на другую.)

Ответ. **а), е) Нельзя; б), в), г), д) можно.**

Решение. **а)** Так как по условию все монеты нужно положить вдоль стенок, и каждой стенки касается ровно две монеты, то общее количество монет не может быть больше 8. **б)** Просто кладем около каждой стенки по 3 монеты. **в)** Кладем по 2 монеты у каждой стенки, оставшиеся 4 раскладываем по углам, так каждая из них лежит сразу около двух стенок. **г)** Кладем по 1 монете у каждой стенки, оставшиеся 8 раскладываем по углам(по 2 в каждом углу). **д)** По 3 монеты в кажом углу. **е)** Заметим, что монета не может касаться двух противоположных стенок коробки(только двух соседних, если лежит в углу). Поэтому общее число монет, касающихся двух противоположных стенок, равно $7 + 7 = 14 > 12$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать в пункте а)(е)).`

● *Сколько нам нужно положить у каждой стенки? Сколько минимум(максимум) стен может быть рядом с каждой монетой? Тогда как оценить сумму количества монет у каждой стенки? Монет может быть больше, чем 8?(Меньше, чем 14?)*

○ `Ученик не знает, что делать в пунктах в), г), д).`

• *Мы можем положить монету так, чтобы она касалась сразу, например, двух стенок?(да, можем положить монету в угол) А можем сделать так, чтобы этих двух стенок одновременно касалось несколько монет?(да, положить их друг на друга)*

$\boxed{4}$ Можно ли в примере на сложение заменить одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными так, чтобы получилось **ОДИН+ОДИН+ПЯТЬ=СЕМЬ**?
Ответ. **Нет.**

Решение. В этом выражении используются 11 различных букв, а цифр у нас всего 10, поэтому не получится подобрать разные цифры для разных букв. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

• *Сколько у нас есть цифр? А сколько есть букв, вместо которых мы должны поставить эти цифры?*

$\boxed{5}$ Можно ли разместить цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ в таблице 3×3 так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы?
Ответ. **Да, можно.**

Решение. Так как сумма этих чисел равна 45, то сумма чисел в любой строке равна $45 : 3 = 15$. Посмотрим, какие числа могут стоять в одном столбце/строке с 9 и с 8.$15 = 9+6 = 9+1+5 = 9+2+4$, $15 = 8+7 = 8+1+6 = 8+2+5 = 8+3+4$. Отсюда, например, видно, что 9 нельзя поставить на главной диагонали, а 8 можно. Дальше можно подобрать, например, следующий(снова не единственный) вариант.

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{matrix}$$

☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

• *Какая сумма у всех наших чисел? Какая тогда сумма должна быть в каждой строчке, столбце?(*15*) Давай посмотрим, какие числа могут стоять в одном столбце, строке или на диагонали с* 9 *и с* 8.*(*$15 = 9+6 = 9+1+5 = 9+2+4$, $15 = 8+7 = 8+1+6 = 8+2+5 = 8+3+4$*)*

$\boxed{6}$ Про 25 чисел известно, что сумма любых четырёх из них положительна. Может ли сумма всех 25 чисел быть отрицательна?
Ответ. **Нет, не может.**

Решение. Отрицательных чисел среди этих 25 может быть не более трёх, иначе сумма четырёх отрицательных чисел была бы отрицательной, а это противоречит условию. Взяв любую четвёрку, содержащую все отрицательные числа (её сумма по условию положительна) и прибавив все остальные числа (все они неотрицательные), получим положительное число. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

• *Сколько у нас может быть отрицательных чесил? Может ли их быть, например, больше четырех? А ровно четыре? Отлично, а что мы знаем про сумму любой четверки, содержащей все отрицательные числа? А что будет, если прибавить к этой четверке все остальные чилса?*

$\boxed{7}$ Андрей, Боря и Вася вместе съели 10 конфет.
Андрей сказал: «Я съел три конфеты, а Боря — четыре».
Боря ответил: «Я съел всего лишь две конфеты, а Вася — три».
Вася заявил: «Я съел четыре конфеты, а вот Андрей съел целых пять».
Могло ли быть так, что каждый из них был прав хотя бы в одном из двух своих утверждений?
Ответ. **Нет, не могло.**

Решение. Не могло. Если было бы верно первое утверждение Андрея, то должно было бы быть верным верным утверждение Васи(ведь второе его утверждение противоречит тому, что Андрей действительно съел 3 конфеты), тогда и у Бори должно быть верну первое утверждение(второе противоречит правдивому высказыванию Вами), но в этом случае вместе они съели $3+2+4=9<10$, что противоречит условию. Если же верно второе утверждение Андрея, то должно быть верным второе утверждение Бори(так как он съел 4 конфеты, а говорит, что съел их всего лишь две, а значит, его первое утверждение ложно). Но тогда выходит, что Боря съел 4 конфеты, а Вася — три, в сумме 7, значит, Андрей тоже должен был съесть 3 конфеты(ведь втроем они съели 10), а это противоречит обоим утверждениям Васи. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Могут ли быть верны какие-нибудь два утверждения про одного и того же мальчика?(нет, потому что в них говорится о разном количестве конфет) Тогда какое утверждение верно у Бори, если у Андрея верно второе? А у Васи тогда какое? А какое верно у Васи, если у Андрея верно первое? А у Бори?*

$\boxed{8}$ Можно ли раскрасить клетки доски 5×5 в два цвета — чёрный и белый — так, чтобы у каждой белой клетки были ровно три соседние по стороне чёрные клетки, а у каждой чёрной клетки — ровно две соседние по стороне белые?

Ответ. **Нет, нельзя.**

Решение. Если такая раскраска возможна, то угловые клетки должны быть чёрными, так как у них всего по две соседние клетки, соответственно, соседние с ними должны быть белыми; все соседние с этими белыми клетками должны быть чёрными, так как у них ровно по три соседних. Из оставшихся 5 клеток все, кроме центральной, могут быть только белыми (им уже не набрать по два белых соседа), но тогда у центральной клетки будет четыре белых соседа. Противоречие. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какого цвета может быть угловая клетка? А соседние с ней тогда какого цвета? А соседние с ними? Сколько тогда соседние белых/черных клеток у центральной? Мы ее сможем покрасить в какой-нибудь цвет?*

$\boxed{9}$ На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11000 км. Сможет ли правительство страны соединить сетью дорог все свои города?

Ответ. **Да.**

Решение. Построим 5 горизонтальных дорог длиной 1000 км так, чтобы верхняя и нижняя отстояли от верхней и нижней границы государства на 100 км, а между соседними дорогами было расстояние 200 км. Ещё построим вертикальную дорогув любом месте, например, вдоль левой стороны кары(хотя на самом деле, нам важно только то, что теперь мы можем перемещаться между горизонтальными дорогами). Уже построено $5 \times 1000 + 800 = 5800$ км дорог. Теперь достаточно соединить каждый из городов с построенными дорогами. Расстояние от любого города до ближайшей горизонтальной дороги не больше 100 км. Значит, их сумма не превосходит $51 \times 100 = 5100$, и $5800 + 5100 = 10900 < 11000$, так что страна справится. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай попробуем сделать что-то вроде сетки с небольшим количеством горизонталей. Чтобы можно было от каждого города дойти по вертикальной линии до «её» горизонтали.*

Листок 14. Задачи про часы

Предлагается решить задачи, в которых присутствуют часы того или иного вида. В начале занятия следует нарисовать типы часов и рассказать их особенности и правила пользования ими: песочные часы способны измерять только время, кратное времени высыпания песка; электронные часы показывают время в формате ЧЧ:ММ или ЧЧ:ММ:СС; стрелочные часы имеют две или три стрелки (зависит от задачи), которые двигаются с постоянными (различными) скоростями.

$\boxed{1}$ **а)** Имеется бикфордов шнур, который сгорает ровно за 20 минут (но он неоднородный и горит с непостоянной скоростью). Как отмерить с его помощью 10 минут? **б)** Имеется два неоднородных бикфордовых шнура, каждый из которых сгорает за 20 минут. Как с помощью этих шнуров отмерить 15 минут?

Решение. Важно: шнур неоднородный! Поэтому если он весь сгорает за 20 минут, отсюда не следует, что его половина (по длине) сгорит вдвое быстрее, этим пользоваться нельзя! **а)** Можно поджечь шнур с двух концов одновременно, тогда он сгорит вдвое быстрее, то есть за 10 минут. **б)** Поджигаем одновременно один шнур с двух концов, а другой — с одного. Когда первый шнур сгорит, пройдёт 10 минут, а второй за это время сгорит наполовину. Теперь поджигаем второй шнур ещё и со второго конца. Тогда его оставшаяся половина сгорит не за 10 минут, а за 5. Всего как раз и получится 15 минут. ☐

○ `Ученик не знает, что делать в пункте а).`

● *Если поджечь бикфордов шнур с двух концов, то через какое время эти два пламени встретятся?*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте б).`

● *Воспользуйтесь пунктом* ***а)****.*

$\boxed{2}$ За 2 секунды мама-кенгуру делает три прыжка, а кенгуренок — пять прыжков. Длина прыжка мамы-кенгуру 6 метров, а длина прыжка кенгуренка в 3 раза меньше. Мама с кенгуренком играют в догонялки: кенгуренок отпрыгивает на 12 прыжков, после чего мама начинает его догонять, а он прыгает дальше. За какое время мама его догонит?

Ответ. **за 6 секунд.**

Решение. **Первый способ.** За две секнды мама-кенгуру делает 3 прыжка, длина которых в три раза больше прыжка кенгуренка, то есть отпрыгивает на 9 прыжков кенгуренка. Значит, за две секунды расстояние между мамой и кенгуренком сокращается на 4 прыжка кенгуренка. Между ними было 12 прыжков кенгуренка, следовательно, маме понадобится 6 секунд, чтобы его догнать.

Второй способ. Из условия задачи следует, что мама-кенгуру за 2 секунды преодолевает 18 метров, а кенгуренок — 10 метров. Следовательно, за одну секунду мама преодолевает 9 метров, а кенгуренок — 5 метров. Между ними изначально было 12 прыжков кенгуренка, то есть, 24 метра. За 1 секунду расстояние между ними сокращается на 4 метра, следовательно, маме понадобится $24 : 4 = 6$ секунд для того, чтобы догнать кенгуренка. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько метров преодолевают мама-кенгуру и кенгуренок за одну секунду?*

$\boxed{3}$ Имеются двое песочных часов: на 3 минуты и на 10 минут. Можно ли при помощи этих часов сварить яйцо, если его нужно варить без остановки: **а)** ровно 4 минуты; **б)** ровно 5 минут; **в)** ровно 28 минут?

Ответ. **Во всех пунктах ответ положительный.**

Решение. **а)** Запускаем часы на 3 и 10 одновременно. Через 3 минуты первые часы переворачиваем. Ещё через 3 минуты ставим варить яйцо и варим до тех пор, пока не закончатся 10 минут. **б)** Запускаем двое часов одновременно. Часы на 3 минуты будем переворачивать каждый раз, как песок в них высыплется. Когда 10 минут закончатся, поставим вариться яйцо. В этот момент в 1-ых часах осталось две минуты. Когда в первых часах песок высыплется в четвёртый раз, перевернём их снова, и вот когда пройдёт ещё три минуты, закончим варить яйцо. **в)** $28 = 28 \cdot (10 - 3 \cdot 3)$. Так что если запустить двое часов одновременно и переворачивать их каждый раз, как песок высыпается, причём начать варить яйцо после $28 \cdot 3 = 84$ переворотов первых часов, а закончить после 10 переворотов вторых, яйцо как раз и будет вариться 28 минут. Стоит отметить, что этот способ явно не самый простой и быстрый, зато самый универсальный: «складывая» таким образом единичные минуты, полученные как $1 = 10 - 3 \cdot 3$, можно набрать вообще любое целое число минут. ☐

○ `Ученик не знает, что делать в пунктах а) и б).`

● *Имеет смысл рассматривать только одновременный запуск двух часов.*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте в).`

● *Предположим, что часы запущены одновременно, а перевороты совершаются сразу же после высыпания. Какое количество минут мы можем получить таким образом?*

$\boxed{4}$ **а)** Петины электронные часы показывают часы и минуты. Петя может в любой момент посчитать сумму цифр на этих часах (например, в $16 : 15$ он получит $1 + 6 + 1 + 5 = 13$). В какой момент эта сумма будет наибольшей? **б)** Электронные часы показывают время в формате ЧЧ:ММ:СС (например, $14 : 23 : 57$). Каких секунд в сутках больше: тех, когда часы показывают, что минут больше, чем секунд (например, $04 : 45 : 14$), или тех, когда минут меньше, чем секунд (например, $23 : 37 : 59$)? **в)** На городских электронных часах высвечивается время (часы и минуты) от $00 : 00$ до $23 : 59$. Сколько времени в сутки на этих часах хотя бы в одном месте высвечивается цифра 2?

Ответ. **а)** $19 : 59$; **б) поровну; в)10 часов 30 минут.**

Решение. **а)** Третья цифра на часах всегда не больше 5, а четвёртая всегда не больше 9. Если первая цифра 2, то вторая не больше 3, а сумма первой и второй цифр не больше 5. Если же первая цифра 0 или 1, то вторая может быть от 0 до 9. Сумма первой и второй цифры будет наибольшей, когда первая цифра 1, а вторая 9. Таким образом, наибольшая сумма цифр будет в $19 : 59$. **б)** Допустим, мы нашли такую секунду, когда часы показывают, что минут больше, чем секунд (например, $04 : 45 : 14$). Будем называть все такие секунды секундами первого типа. Поменяв местами минуты и секунды, получим такую секунду, когда на часах больше секунд, чем минут (в нашем примере $04 : 14 : 45$). Все такие секунды будем называть секундами второго типа. Аналогичным образом каждой секунде второго типа можно подобрать в пару секунду первого типа (например, парой для $23 : 37 : 59$ будет $23 : 59 : 37$). Поэтому те секунды, когда минут и секунд на часах не поровну, разбились на пары: в каждой паре одна секунда первого типа, а другая — второго. А значит, секунд обоих типов поровну. **в)** Цифра 2 всё время присутствует на часах с $02 : 00$ до $02 : 59$, с $12 : 00$ до $12 : 59$ и с $20 : 00$ до $23 : 59$ — в общей сложности уже 6 часов. В каждый из остальных 18 часов она присутствует на 2-й, 12-й, 32-й, 42-й и 52-й минутах, а ещё с 20-й по 29-ю минуту. Это ещё 15 минут в час, то есть четыре с половиной часа. Итого получаем 10 часов 30 минут. ☐

○ `Ученик не знает, что делать в пункте а).`

● *Какие цифры могут стоять на первых двух позициях? Какие из них доставляют максимальную сумму?*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте б).`

● *Верно ли, что число часов на циферблате можно не учитывать?*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте в).`

● *Сколько времени находится на циферблате двойка, если она присутствует на позиции часов? А если на позиции минут?*

$\boxed{5}$ Какой угол образуют часовая и минутная стрелка в 3 часа 5 минут?

Ответ. 62,5°.

Решение. Часовая стрелка проходит одно (часовое) деление за 60 минут. Поэтому за 5 минут она пройдет 1/12 деления. То есть, в 3 часа 5 минут часовая стрелка будет показывать $3\frac{1}{12}$ часа. Так как градусная мера угла между двумя соседними часовыми деления составляет $360^\circ : 12 = 30^\circ$, то искомый угол равен $30^\circ + 30^\circ + 30^\circ : 12 = 62{,}5^\circ$. □

○ `Ученик не знает, что делать.`

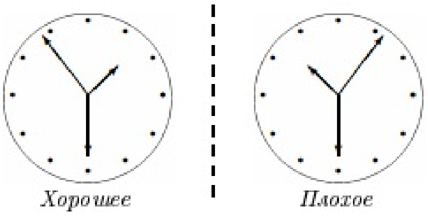
● *Какую часть циферблата проходит часовая стрелка за 5 минут?*

$\boxed{6}$ Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

Ответ. **Поровну.**

Решение. Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот (см. рис.).

В полночь стрелки совпадают. Если пустить часы назад, то стрелки, будут показывать какое-то вчерашнее время, а их расположение будет зеркально симметричным расположению стрелок на обычных часах. Итак, каждому хорошему моменту сегодня соответствует плохой момент вчера. Причем интервалу хорошего времени соответствует интервал плохого. Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.

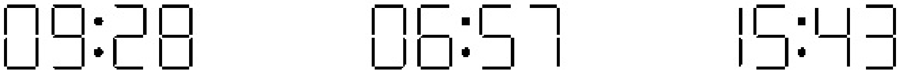


□

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Нарисуйте показание часов в хорошее и плохое время суток. Что произойдет с показаниями часов в плохое время суток, если поменять местами часовую и секундные стрелки?*

$\boxed{7}$ На рисунке приведены три примера исправных электронных часов. Сколько палочек могут перестать работать, чтобы время всегда можно было определить однозначно?



Ответ. **13 палочек**

Решение. На первой позиции требуется различить три цифры: 0, 1 и 2. Для этого можно обойтись двумя палочками, например, верхней и средней: если они горят обе, то это 2, если только верхняя, то это 0, а если не горит ни одна — это 1. Одной палочкой, очевидно, обойтись нельзя.

На второй и на четвёртой позициях надо уметь различать все 10 цифр. Обязаны работать пять палочек: верхняя, иначе мы спутаем 7 и 1; средняя, иначе спутаем 8 и 0; левая верхняя, иначе спутаем 9 и 3; левая нижняя, иначе спутаем 6 и 5; правая верхняя, иначе спутаем 9 и 5. Палочки нижняя и правая нижняя могут не работать — несложно проверить, что путаницы в цифрах не будет.

Осталась третья позиция, на которой нужно уметь различать цифры от 0 до 5. Две палочки дают четыре комбинации, значит, необходимы, как минимум, три работающие палочки. И действительно, можно обойтись верхней, левой верхней и левой нижней палочками. Тогда цифры на этой позиции будут выглядеть так:

(Цифре 1 соответствует пустое изображение.) Таким образом, на первой позиции может не работать 5 палочек, на второй и на четвертой — по две и на третьей — 4. Итого: $5+2+2+4=13$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько палочек можно убрать, чтобы цифры 0, 1 и 2 можно было отличить?*

Листок 15. Шахматные задачи

На этом занятии мы поговорим про задачи на шахматной доске. Они бывают очень разного формата. Где-то нужно расставить фигуры, какие-то задачи связаны скорее с раскраской, но все они будут умещаться на доске 8×8. В начале занятия стоит напомнить детям, как ходят фигуры, обсудить, как раскрашена доска и как обозначаются клетки шахматной доски. Также стоит напомнить, что главными диагоналями называются диагонали из восьми клеток.

$\boxed{1}$ Какое наибольшее количество **а)** ладей; **б)** слонов; **в)** королей; **г)** коней; **д)** ферзей; можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ. **а)** 8; **б)** 14; **в)** 32; **г)** 16; **д)** 8.

Решение. **а)** Ясно, что в строке не может стоять больше одной ладьи, так как в этом случае они будут бить друг друга. Поэтому больше 8 ладей расставить нельзя. Пример для восьми: расставим их на главной диагонали.

б) Проведем диагонали сверху вниз и слева направо(не только главные, первая будет состоять из одной клетки, вторая — из двух, и так далее, 8-ая — из восьми, следующая снова из семи, и так далее). Их получится 15 штук. Ни на какой из них нельзя поставить двух слонов. Также заметим, что две крайние диагоали(по факту — угловые клетки) состоят из одной клетки и сами лежат на одной главной диагонали, а значит, из них можно занять только одну. Следовательно, нельзя расставить больше 14 слонов. Пример: поставим 7 ладей в левые 7 клеток верхней строки и еще 7 в левые 7 клеток нижней строки.

в) Доску можно разбить на 16 квадратов 2×2. В каждый из них можно поставить не более одного короля. С другой стороны, по одному королю поставить можно: например, в левые верхние углы всех квадратов.

г) Разобьём доску на 8 прямоугольников 4×2, а каждый из них — на четыре пары клеток, соединенных ходом коня. Всего получим 32 пары клеток, и в каждой из них может стоять не более одного коня. 32 коня можно поставить, например, на все белые клетки.

д) Как и ладей, ферзей не может быть больше восьми, так как ферзь бьет все клетки строки, на которой стоит. Пример: поставим ферзей в клетки $a2, b4, c6, d8, e3, f1, g7, h5$. □

○ `Ученик не знает, что делать в пунктах а) и д).`

● *Можно ли поставить две ладьи(двух ферзей) на одной строчке? Почему? А сколько всего строчек? Отлично, мы получили оценку. А можно теперь для нее придумать пример?*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте б).`

● *Можно ли поставить двух слонов на одной диагонали? А сколько у нас всего диагоналей?(Давай выберем какое-то одно направление для диагоналей, которые считаем!) А можно одновременно занять слонами клетки в двух самых маленьких(одноклеточных) диагоналях?*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте в).`

● *Сколько минимум клеток бьет король? Еще одну занимает сам. Сколько всего клеток он тогда "занимает"? Давай разобьем все поле на такие части, что в каждой именно столько клеток и нельзя поставить больше ожного короля. Сколько их получается? Тогда можно ли поставить королей больше?*

○ `Ученик не знает, что делать в пункте г).`

● *Давай попробуем разбить все клетки на такие пары, что из одной клетки пары в другую можно попасть ходом коня. Сколько будет пар? А можно ли в какой-нибудь паре занять конями обе клетки? А можно построить пример именно для такого количества коней?*

$\boxed{2}$ Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки $a1$, закончив в клетке $h8$ и на каждой клетке доски побывав ровно один раз?

Ответ. **Нет, нельзя.**

Решение. Чтобы обойти все клетки шахматной доски, надо сделать 63 хода. После каждого нечётного хода конь находится на белой клетке, после каждого чётного – на чёрной. Значит, на 63-м ходу конь обязательно встанет в белую клетку. Но начинаем мы с белой клетки $a1$, а клетка $h8$ — чёрная, следовательно, после последнего хода на этой клетке конь оказаться не может. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Как ходит конь? А сколько холов ему нужно сделать? С клетки какого цвета мы начинаем? Цвет меняется, когда конь делает ход? На клетке какого цвета мы должны финишировать?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматную доску 8×8, чтобы все белые клетки были под боем этих ладей? (Под боем ладьи считаются все клетки строки и столбца, в которых находится ладья.)

Ответ. **4.**

Решение. Находясь на белой клетке, ладья бьёт 7 белых клеток, а находясь на чёрной клетке, – 8, а белых клеток на доске 32, поэтому трех ладей точно не хватит. Пример: достаточно поставить четыре ладьи на поля $a1, c3, e5$ и $g7$. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Какое наибольшее количество белых клеток может бить одна ладья? А сколько всего белых клеток? Сколько тогда ладей точно понадобится? Давай проверим, этого хватит?*

$\boxed{\mathbf{4}}$ В некоторых клетках шахматной доски стоят фигуры. Известно, что на каждой горизонтали стоит хотя бы одна фигура, причём в разных горизонталях — разное число фигур. Докажите, что всегда можно отметить 8 фигур так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали стояла ровно одна отмеченная фигура.

Решение. На горизонтали может стоять от одной до восьми фигур. Так как на разных горизонталях разное число фигур, на некоторой горизонтали стоит ровно одна фигура, на некоторой другой — две фигуры, и так далее, наконец, некоторая горизонталь заполнена восемью фигурами. Пронумеруем горизонтали в соответствии с количеством стоящих на них фигур. Отметим на первой горизонтали ее единственную фигуру. Так как на второй горизонтали две фигуры, хотя бы одну из них можно отметить. Поскольку на третьей горизонтали три фигуры, хотя бы одну из них можно отметить, и так далее. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько вообще фигур может стоять в строке? А сколько строк? Есть ли строка, в которой мы точно знаем, какую фигуру выбрать? А из какой строки стоит выбирать дальше?*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали (не только на главных) находилось чётное число фишек?

Ответ. **48.**

Решение. Заметим, что на шахматной доске имеется ровно 16 диагоналей, содержащих нечётное число клеток и не имеющих между собой общих клеток. Следовательно, число фишек не может быть больше, чем $64 - 16 = 48$, ведь на нечетной диагонали не могут быть заняты все клетки, в этос случае их было бы нечетное количество. Пример: можем расставить фишки на все клетки, кроме клеток главных диагоналей. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько у нас есть диагоналей с нечетным количеством клеток? А они могут оказаться полностью занятыми? А они пересекаются? Сколько тогда клеток точно придется освободить? А можно освободить именно столько? Давай попробуем построить пример. Какие клетки точно свободны?*

$\boxed{\mathbf{6}}$ Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

Решение. Если в квадрате 3×3 поставить коней на все клетки, кроме центральной, то каждый конь будет бить ровно двух других. Теперь расположим четыре таких квадрата(без коня в центре) в углах шахматной доски. Легко проверить, что в этом случае каждый конь бьет только двух коней из своего квадрата. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Давай сначала расставим не* 32, *а поменьше, но так, чтобы правило выполнялось? Например,* 8. *А можно их уместить на маленькой доске, например,* 3×3*? А как тогда на ахматной разместить* 32*?*

7 Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.

Решение. При каждом недиагональном короля ходе меняется цвет поля, на котором он стоит; при диагональном не меняется. Поскольку король обошёл всю доску и вернулся обратно, цвет поля менялся с белого на чёрный столько же раз, сколько с чёрного на белый, значит, недиагональных ходов король сделал чётное количество. А всего он должен был сделать 64 хода, чтобы обойти все клетки по одному разу и вернуться в исходную. Поэтому число диагональных ходов равно 64 минус число недиагональных ходов — тоже чётное число. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько всего король сделал ходов? А с какого цвета он начал? А каким законцил? Тогда сколько раз он мог менять цвет? Может ли это количество быть нечетным? А он меняет цвет, когда ходит на соседнюю по стороне клетку? А когда ходит по диагонали?*

8 На шахматной доске расставили n белых и n черных ладей так, чтобы ладьи разного цвета не били друг друга. Найдите наибольшее возможное значение n.
Ответ. **16.**

Решение. Докажем, что при $n > 16$ осуществить указанную расстановку невозможно. Заметим, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали могут располагаться ладьи только одного цвета (либо она может оказаться свободной от ладей). Будем называть строку или столбец доски черной или белой, если на ней стоят фигуры данного цвета. Так как ладей больше 16, то белых горизонталей не меньше трех. Если белых горизонталей ровно три, то в одной из них не менее 6 ладей, то есть белых вертикалей не менее шести, а черных не больше двух. Но это невозможно, так как черных ладей тоже n. Итак, белых горизонталей не меньше четырех, а значит, черных не больше четырех. Это верно и для черных вертикалей. Следовательно, черных ладей не больше 16. Противоречие. Пример возможной расстановки при $n = 16$: расставим белые ладьи квадратом 4×4 в нажнем левом углу, а черные — в правом верхнем. ☐

○ `Ученик не знает, что делать.`

● *Сколько строчек могут занимать белые ладьи? А столбцов? А сколько тогда останется черным? А их можно переставить так, чтобы белые ладьи занимали столько же строк, сколько черные занимают строк или столбцов?*